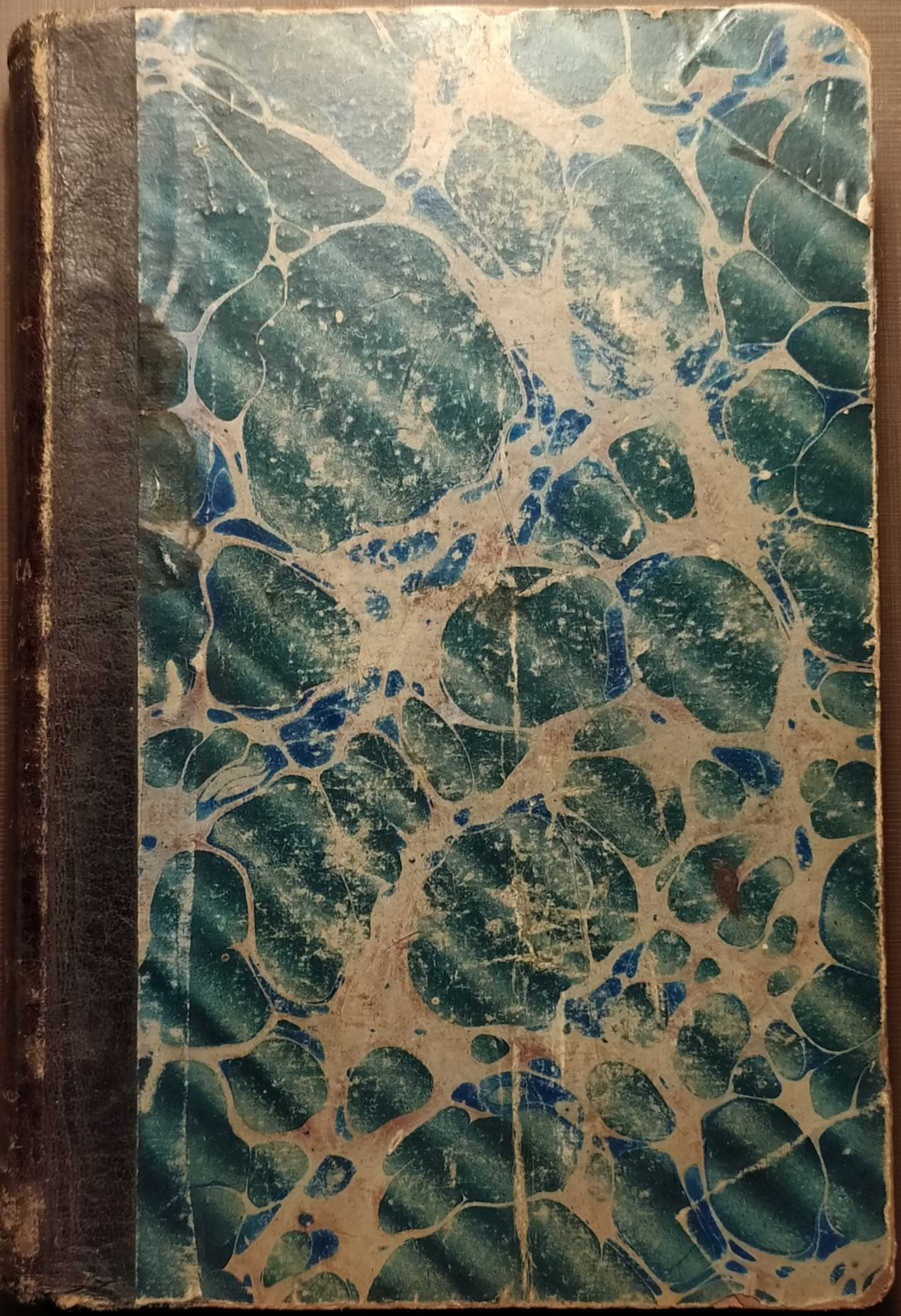


TRATTATO ELEMENTARE

DI ARITMETICA

TEORICO-PRATICA

ad uso dei Corsi Tecnici, Ginnasiali, Liceali
e delle Scuole Militari

ARRICCHITO DI **1000** PROBLEMI

pubblicato per cura di **A.** e **C.**

APPROVATO
dal Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione
il 26 luglio 1849

II EDIZIONE.

TORINO, 1875.
Presso l'UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE
e presso G. B. PARAVIA e COMP.

Proprietà letteraria

TIPOGRAFIA C. FAVALE E COMP.

PREFAZIONE

Poche sono le scienze la cui utilità sia più generalmente sentita di quella dell'Aritmetica. Essa è utile in tutte le condizioni della vita; è necessaria, anzi indispensabile al commercio, ed alla massima parte delle sì numerose e cotanto svariate professioni industriali che occupano il più della popolazione. Egli è quindi importantissima cosa l'adoprarsi perchè una non superficiale, ma seria e ben intesa cultura di questa scienza venga ognora più propagata nelle scuole e fra il popolo. A tale scopo miriamo noi colla pubblicazione del **Trattato elementare di Aritmetica teorico-pratica** che offriamo alla studiosa gioventù.

In esso anzichè porgere la materia ed ordinarla in modo da soddisfare a questo od a quel programma, giudicammo più convenevole presentare un tutto compiuto e disposto così, che venendo anche a cambiare i presenti programmi governativi, gli alunni di qualsivoglia corso abbiano sempre a trovarvi quanto loro abbisogna per acquistare le volute cognizioni in quest'importante ramo dell'istruzione.

Agli alunni de' Corsi Classici e Tecnici, e delle Scuole militari, vengono esposte con precisione e chiarezza tutte le teoriche richieste dai rispettivi programmi. Quindi confidiamo che, ove le abbiano con ordine ed attenzione studiate, saranno in grado di entrare nell'arduo campo degli studi algebrici.

Quelli poi che si avviano al Commercio, potranno tralasciare varie teoriche puramente scientifiche, ed appi-

gliarsi a quelle che più direttamente conducono alla pratica. Essi troveranno nella terza parte metodi pratici e brevi per calcolare, senza logaritmi, gl'interessi composti e le annualità; ed inoltre sufficienti nozioni sugli effetti di commercio, sul cambio, sull'arbitrato, ecc.

Il Sistema metrico decimale venne trattato assai concisamente, rimandando ad altra nostra Opera (*) gli alunni che non avessero per anco sufficiente cognizione.

Credemmo pure dover dare un breve cenno delle principali misure antiche dell'Italia, e farle seguire dal calcolo dei numeri complessi, il quale, oltre che ne occorre sovente il bisogno, serve potentemente allo sviluppo delle giovanili intelligenze.

Ogni teorica venne corredata da appropriati problemi colla mira di vie meglio imprimere nella mente i principii e le regole stabilite. Le soluzioni di tali problemi non furono date in questo libro, per obbligare l'alunno ad esercitare la propria intelligenza; ma a comodo dei signori Professori, vennero stampate in altro volumetto intitolato: **Soluzionario de' problemi contenuti nel Trattato elementare d'Aritmetica.**

Speriamo quindi che il presente libro, singolarmente dopo i miglioramenti introdotti, continuerà ad essere, come per l'addietro, ben accolto dai Professori e dagli Studenti.

(*) *Norma teorico-pratica per l'insegnamento del Sistema Metrico.*

SCUOLE GINNASIALI

Programma per l'Esame d'Aritmetica.

(Anno 1860)

Quarta Classe.

Nozioni preliminari (N^i 1....10). Numerazione decimale (11.... 33). Addizione e sottrazione de' numeri interi (60....84). Moltiplicazione de' numeri interi (92....111). Prodotti di più fattori (99, 100, 167). Potenze, esponenti (99, 376.... 379). Teoremi relativi alla moltiplicazione (163...173).

Rappresentazione de' numeri mediante le lettere dell'alfabeto (143.....52). Rappresentazione di un numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze del 10 (153). Idea dei differenti sistemi di numerazione (154....162). Divisione de' numeri interi (112....139). Teoremi ad essi relativi (174....186). Condizioni di divisibilità (193....209, 251). Prova del 9 e dell'11 (210....216). Del massimo comun divisore di due o più numeri interi (217....225).

Teoria dei numeri primi (226.....245). Formazione di una tavola di numeri primi (234). Scomposizione di un numero in fattori primi (246....250). Composizione del massimo comun divisore di più numeri (256.....258). Trovare tutti i divisori d'un numero (253....255). Multipli comuni a due o più numeri (259). Minimo multiplo comune a più numeri (260....266). Teoria delle frazioni (267....338).

Quinta Classe.

Teoria delle frazioni decimali (34.....44, 66, 77, 106, 134, 135, 339....341). Complemento aritmetico (85....91). Condizione alla quale deve soddisfare una frazione ordinaria perchè possa essere convertita in frazione decimale (343). Valutazione approssimata delle grandezze (359....375). Frazioni decimali periodiche (344....349). Frazione ordinaria generatrice di una decimale periodica data (350....357).

Teoria dei quadrati e delle radici quadrate (386....411). Quadrato della somma di due numeri (388). Quadrato di un prodotto (392). Teoremi relativi ai quadrati (388....407). Radice quadrata a meno d'un'unità (408....420). Calcolo delle radici quadrate con una data approssimazione (421....423). Valutazione in decimali della radice quadrata di un numero intero o frazionario (423, 428....430).

Teoria dei rapporti e delle proporzioni (575....610). Delle misure (477....479). Sistema metrico (480....522). Calcolo delle mi-

sure nel sistema metrico (*ibid*). Altre misure usate in Italia e fuori (523....535, e *pag.* 328). Calcolo delle misure nelle quali l'unità principale non è divisa in parti decimali (561....574).

Applicazioni della teoria dei rapporti (613....653, 719....755). Delle grandezze proporzionali (611). Delle grandezze inversamente proporzionali (612). Regola del tre semplice e composta (613....620). Metodo di riduzione all'unità (614).

SCUOLE TECNICHE

Programma d'Aritmetica.

(Anno 1860).

Sistema volgare di numerazione orale e scritta (11....33). Le quattro prime operazioni dell'aritmetica sui numeri interi e loro prove (60....142). Numeri e frazioni decimali (34....44). Le quattro prime operazioni dell'aritmetica sui numeri decimali (66, 77, 106, 135). Massimo comun divisore di due numeri (217.....223). Frazioni ordinarie (267....284). Semplificazione delle frazioni ordinarie (288....291). Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore (292....295). Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa (342....355).

Pesi e misure (477....479). Sistema metrico antico (523....535). Sistema metrico decimale (480....522). Esposizione delle misure effettive usate in commercio (489, 508, 512, 522). Dei numeri complessi (550....553). Riduzione dei numeri complessi alla forma di frazione e viceversa (554....556). Riduzione dei numeri complessi non decimali in decimali e viceversa (557, 558). Le quattro prime operazioni sui numeri complessi (metodo delle frazioni ordinarie) 561....574). Conversione delle misure metriche decimali nelle antiche e viceversa (559, 560). Uso delle tavole di riduzione (535 *e pag.* 328).

Regola del tre semplice e composta (613....620). Osservazione sui rapporti diretti ed inversi (582). Regola d'interesse e di sconto semplice (621....630, 643....651). Regola di società e di ripartizione (719....729). Regola di alligazione (741.....747). Regola di cambio (750....752).

Principii della divisibilità dei numeri (193....209). Ricerca dei divisori primi di un numero intero (246....249). Ricerca di tutti i divisori d'un numero intero (253....255). Ricerca del massimo divisore comune a più di due numeri dati (256....258). Riduzione di più frazioni al *minimo* denominatore comune (296....300). Conversione delle frazioni periodiche decimali in ordinarie (353, 355).

Programmi d'Aritmetica

per gli esami di concorso all'ammissione nella Regia Militare Accademia ed alle Scuole Militari di Fanteria e di Cavalleria.

(Anno 1865).

1. Dimostrazione delle regole per le quattro operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione de' numeri interi (61.....64, 71.....75, 102.....105, 124.....131).

2. Regola per risolvere un numero intero ne' suoi fattori semplici e composti (246.....255). Proprietà principali relative al prodotto ed al quoziente di due numeri (163.....186). Minimo comun dividendo di più numeri (259....266).

3. Divisibilità di un numero per 2, per 3, per 5, per 9 (202, 205, 206). Teoremi sui quali è fondata le ricerca del massimo comun divisore di due numeri; regola che se ne deduce (218....220).

4. Definizione delle frazioni ordinarie e loro principali proprietà (267.....284). Riduzione d'una frazione a più semplice espressione (288....291). Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore (292....300).

5. Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni e sugli interi uniti a frazioni (305.....334).

6. Frazioni decimali (34.....40). Loro principali proprietà (41.... 44). Le quattro operazioni fondamentali sui decimali (66, 77, 106, 135).

7. Conversione d'una frazione ordinaria in decimale e reciprocamente (342, 354). Caso in cui la frazione decimale è periodica (353, 355).

8. Addizione e sottrazione dei numeri complessi (561, 562). Moltiplicazione e divisione dei numeri complessi ridotti in frazioni ordinarie (565, 567, 569....574).

9. Esposizione del sistema metrico (480....522). Principio generale per la conversione delle misure, ovvero modo di determinare il rapporto tra due unità della stessa specie (559, 560).

10. Ragioni e proporzioni (575....586). Loro principali proprietà (580, 581, 593....610).

11. Regola del tre semplice e composta (613....620).

12. Regola di società, d'interesse, di sconto, di alligazione (724....729, 621....630, 643....653, 741....747).

Programma d'Aritmetica

per l'esame d'ammissione al Corso Universitario di Matematica.

1. Definizioni (1....10). Numerazione decimale (11.....33). Teoria generale de' sistemi di numerazione, di cui il 10 non è base (154....162). Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione de' numeri interi; verificazione de' risultati di queste operazioni (60.....142). Indipendenza di un prodotto dall'ordine con cui si moltiplicano i fattori (167).

2. Divisibilità dei numeri (193....200). Numeri primi; numeri primi fra loro (226....245). Numeri divisibili per 2, 3, 5, 9, 11, 25 (201....207). Scomposizione di un numero ne' suoi fattori primi (246....249). Ricerca del massimo comun divisore (217....225, 256....258). Ricerca del più piccolo numero divisibile per numeri dati (259.....266).

3. Frazioni ordinarie (267....284). Loro riduzioni ai minimi termini; allo stesso ed al più più piccolo denominatore (285....300). Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione delle frazioni e dei numeri complessi, ossia composti di parte intera e di parte frazionaria (305....343).

4. Frazioni decimali (34....44, 66, 77, 106, 134, 135, 339..... 341). Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione fatte in modo da ottenere solo le cifre decimali delle quali si abbisogna; approssimazione del risultato ottenuto allorquando si opera sovra numeri la cui approssimazione è nota (359....375). Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali (342....344). Generatrice di una frazione periodica (353....357).

5. Sistema metrico decimale; misure di lunghezza, di superficie, di volume e di peso; monete (480....522). Ragguaglio tra le nuove e le antiche principali misure e monete del Regno (535).

6. Ragione aritmetica ed equidifferenza: Ragione geometrica, proporzione e sue proprietà principali (575....610). Ragione diretta ed inversa (582, 611, 612). Regola del tre semplice e composta (613....620). Regola d'interesse e di sconto semplice (621..... 630, 643....653). Regola di società, di cambio e di alligazione (724.... 729, 750....752, 741.....747).

7. Potenze e radici de' numeri positivi, ed esponente od indice intero e positivo (376....404). Quantità irreduttibili od irrazionali (405....407). Estrazione della radice quadrata dei numeri interi o frazionarii con una data approssimazione (412....434).

TRATTATO D'ARITMETICA

TEORICO-PRATICA

PARTE PRIMA

PRELIMINARI, OPERAZIONI FONDAMENTALI, PROPRIETÀ DEI NUMERI, FRAZIONI E RADICI

Origine dell'Aritmetica.

Quantunque i bisogni della vita fossero meno numerosi ne primi tempi di quello siano al presente, è certo però che sin d'allora erano pochi gli uomini che potessero bastare a loro stessi, e trovare nelle proprie possessioni quanto era necessario al loro benessere. Quest'insufficienza diede origine alle *permute*, che ne' primordi non si poteano fare se non in natura, cioè uno dei contraenti dava all'altro parte delle cose ond'egli soprabbondava, per ricevere quelle di cui era mancante.

Se non che, i bisogni essendosi moltiplicati, le permute divennero più difficili, soprattutto fra le popolazioni lontane le une dalle altre, e sarebbero anche divenute impossibili, se la necessità di continuarle non avesse desta l'idea di applicare ad alcuni metalli un valore convenzionale equivalente in certa guisa a quello attribuito alle cose in natura. Tale fu l'origine delle *monete*, e le permute fatte col mezzo di esse si chiamarono *vendite*.

Gli sviluppi successivi del commercio resero di giorno in giorno le vendite più complicate, e le estimazioni vie più difficili. Si sentì quindi il bisogno di metodi pronti e sicuri per effettuarle in modo da tutelare i proprii interessi del continuo esposti a nuovi pericoli. Le ricerche fatte a tal fine diedero risultati soddisfacenti per allora; si perfezionarono poscia, e si pervenne finalmente a stabilire regole certe e fisse, il cui risultato produsse la scienza appellata **Aritmetica.**

PRELIMINARI.

1. — Si chiama **grandezza** o **quantità** tutto ciò che è suscettivo d'aumento o di diminuzione.

Per esempio, il peso, il tempo, la linea, gli uomini, le case, ecc.
Si distinguono due specie di grandezze:

1° La grandezza *continua*, che è quella le cui parti sono effettivamente unite fra loro, come: la distanza tra due punti, la superficie d'un campo, le dimensioni d'un corpo, il tempo, il peso, ecc. Lo studio di questa grandezza appartiene alla ***Geometria.***

2° La grandezza *discreta* o *numerica*, che è una collezione di parti simili, ma separate e distinte le une dalle altre, v. g., un gruppo d'alberi, un mazzo di penne, una riunione d'uomini, una somma di danaro, ecc. La grandezza numerica è l'oggetto dell'***Aritmetica.***

2. — Per formarsi esatta idea d'una quantità, bisogna *misurarla*, cioè paragonarla con altra quantità *cognita e della medesima natura*, la qual› dicesi **unità.**

Nelle quantità continue l'unità è arbitraria. Così per misurare la lunghezza d'una tavola si può far uso del metro, del piede, del palmo, ecc. Nelle quantità discrete l'unità vien fornita dalla natura. Così se si contano le penne d'un mazzo, gli scolari d'una classe, ecc., l'unità è necessariamente la penna, lo scolaro, ecc.

3. — L'**unità** è una quantità determinata, scelta arbitrariamente ovvero fornita dalla natura, per servire qual *termine di paragone* a tutte le grandezze della medesima specie.

La riunione di più unità della medesima specie è un *numero;* ovvero più generalmente:

4. — Il **numero** è il risultato del paragone d'una grandezza colla sua unità.

Nel confrontare una grandezza colla sua unità, può accadere, o che la grandezza contenga l'unità un numero esatto di volte, o che contenga l'unità un numero certo di volte più una parte di essa, o che finalmente ne contenga soltanto una parte. Quindi:

5. — Si distinguono tre sorta di numeri:

1° Il *numero intero*, il quale contiene solo unità compiute, come cinque uomini, quaranta case, venti alberi.

2° Il *numero frazionario*, il quale contiene unità intere e parti d'unità, v. g. quattro mele ed una metà, cinque ore e tre quarti.

3° La *frazione*, che è una parte dell'unità, come la metà d'un pomo, i tre quarti d'una melarancia.

Quando nell'enunciare un numero si specifica la natura della grandezza di cui si tratta, il numero si chiama *concreto;* in caso contrario *astratto.* Se più numeri si riferiscono alla stessa unità, si dicono *omogenei;* se vengono riferiti ad unità differenti, diconsi *eterogenei.*

6. — Il numero **concreto** è quello di cui viene indicata la natura dell'unità.

Per es. otto case, dieci anni e mezzo, la metà d'una melarancia.

Il numero **astratto** è quello di cui non s'indica la natura dell'unità.

Tali sono: venti, trenta, nove e tre quarti, cinque sesti.

Numeri **omogenei** (della medesima specie) chiamansi quelli che sono riferiti alla stessa unità.

Tali sono 24 grammi e 30 grammi.

Numeri **eterogenei** (di specie diversa) si dicono quelli che sono riferiti a differenti unità.

Per es. 24 grammi e 30 metri.

Bisogna altresì considerare come numeri di specie diversa le frazioni della medesima unità, ma che non hanno la stessa grandezza; come i decimetri ed i centimetri, i quarti ed i terzi dell'unità.

7. — L'**Aritmetica** è la scienza de' numeri.

Essa insegna la maniera di esprimerli colla parola o di rappresentarli con segni, spiega le proprietà dei numeri, stabilisce regole certe e fisse per eseguire sopra di essi tutte le operazioni possibili, e mostra l'applicazione di queste regole nella soluzione di quesiti relativi alla vita sociale.

8. — Il **calcolo** è l'arte di *comporre* e *scomporre* i numeri mediante le operazioni indicate dal ragionamento.

Fra il *calcolo* e l'*aritmetica* v'ha questa differenza: l'*aritmetica* ci dà la ragione dei metodi impiegati nella composizione e nella scomposizione de' numeri; il *calcolo* si limita alla semplice esecuzione delle operazioni dell'Aritmetica.

9. — Le operazioni *fondamentali* dell'Aritmetica sono: l'**Addizione,** la **Sottrazione,** la **Moltiplicazione** e la **Divisione.**

Si chiamano fondamentali, perchè tutte le altre operazioni, per quanto complicate, non sono che combinazioni di queste quattro.

10. — I numeri si *compongono* coll'addizione e colla moltiplicazione, e si *scompongono* colla sottrazione e colla divisione.

Ma prima d'imparare a comporre e scomporre i numeri, è necessario saperli esprimere e rappresentare con segni; il che è lo scopo della ***numerazione.***

CAPO I.

NUMERAZIONE.

11. — La **numerazione** è la parte dell'Aritmetica che insegna a *formare* i numeri, ad *enunciarli*, ed a *rappresentarli*.

12. — La più semplice e naturale maniera di formare i numeri è di aggiugnere da prima un'unità ad un'altra, il che dà il numero *due;* aggiungendo una nuova unità al numero due, si ha il numero *tre*, e così via via.

13. — Da ciò appare che infiniti debbono essere i numeri, giacchè nulla può limitarne la grandezza. Fu dunque necessario trovare il mezzo di dare ai numeri nomi facili a ritenere, e formati secondo certe regole determinate colla combinazione di un piccolo numero di parole. Tale è lo scopo della ***numerazione parlata.***

Inoltre, il bisogno di semplificare la rappresentazione de' numeri e di abbreviare le operazioni che sui medesimi si possono eseguire, ha fatto immaginare caratteri abbreviati e generali, pel cui mezzo la mente potesse intendere con facilità ed indipendentemente dalle parole (necessariamente varie nelle diverse lingue) l'espressione dei numeri e capire i ragionamenti coi quali si scoprono le proprietà dei medesimi. Tal è lo scopo della ***numerazione scritta.*** Dunque :

14. — La numerazione si divide in *numerazione parlata* e *numerazione scritta.*

§ 1° -- NUMERAZIONE PARLATA.

15. — La **numerazione parlata** è l'arte di enunciare tutti i numeri possibili con parole combinate fra loro in maniera semplice e facile.

16. — I nomi dei nove primi numeri sono: **uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.** Aggiungendo *uno* a *nove* si ha il numero **dieci.**

17. — Il numero *uno* si chiama **unità** *semplice* o *unità del prim'ordine.*

18. — La riunione di dieci unità semplici si chiama **decina,** ed è l'unità del *second'ordine.*

Si conta per decine come si è contato per unità semplici, cioè da una decina sino a nove decine, oppure si dice: dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta.

Aggiungendo a ciascuno di questi nove ultimi nomi, quelli dei nove primi numeri, si formano tutti i nomi dei novantanove primi numeri. In tal guisa si avranno i numeri:

dieci-uno, ossia *undici*	dieci-quattro, ossia *quattordici*
dieci-due, ossia *dodici*	dieci-cinque, ossia *quindici*
dieci-tre, ossia *tredici*	dieci-sei, ossia *sedici* (*)

diciassette, diciotto, diciannove, venti, ventuno, ventidue. . . . . trentaquattro. . . sessantotto. . . e così successivamente fino a *novantanove.*

Aggiungendo *uno* al numero *novantanove*, si forma una nuova unità di dieci decine, chiamata *centinaio.*

19. — La riunione di dieci decine si chiama **centinaio,** ed è l'unità del *terz'ordine.*

Si conta per centinaia come si è contato per unità semplici e per decine; perciò si dirà un centinaio, due centinaia, tre centinaia... nove centinaia, o meglio *cento*, *dugento*, *trecento*... *novecento.*

Aggiungendo poi ad ognuno di questi nomi, quelli dei novantanove primi numeri, è chiaro che si otterranno tutti i numeri sino a *novecento novantanove.* Se quest'ultimo numero viene aumentando di *uno* si avrà una collezione di dieci centinaia che si chiama *migliaio.*

20. — La riunione di dieci centinaia, o di mille unità semplici, si chiama **migliaio,** ed è l'unità del *quarto ordine.*

Si sarebbe potuto proseguire dando a ciascun nuovo ordine d'unità un nome particolare, come si è fatto pei tre primi ordini; ma per non moltiplicare inutilmente i nomi dei numeri, si è considerato il *migliaio*, come una nuova *unità principale*, contando poi per *unità*, *decine* e *centinaia di migliaia*, come si è

(*) L'uso ha preferito le espressioni undici, dodici, tredici, quattordici, quindici e sedici, a quelle di dieci-uno, dieci-due, dieci-tre, ecc., essendo esse più brevi e scorrevoli.

contato per unità, decine e centinaia di unità semplici; perciò si dirà *mille*, *due mila*... *trentamila*... *novecentomila*.

21. — La riunione di dieci migliaia si chiama *decina di migliaia*, ed è l'unità del *quint'ordine*.

La riunione di dieci decine di migliaia si chiama *centinaio di migliaia*, ed è l'unità del *sest'ordine*.

Se dopo ciascun numero di migliaia si collocano i novecentonovantanove primi numeri, si avranno tutti i numeri compresi da *uno* sino a *novecentonovantanovemila novecentonovantanove*.

Quest'ultimo numero aumentato di *uno* dà una collezione di dieci centinaia di migliaia chiamata *milione*, il quale vien esso pure, come le migliaia, considerato quale nuova unità principale, di cui si formano *decine* e *centinaia*.

22. — Il **milione** forma l'unità del *settimo ordine*; la *decina di milioni* l'unità dell'*ottavo ordine*; il *centinaio di milioni* quella del *nono ordine*; e il **bilione** quella del *decimo ordine* (*).

Si conta per bilioni come si è contato per milioni; mille bilioni fanno un **trilione,** mille trilioni fanno un **quattrilione,** ecc.

23. — Nell'espressione d'un numero fa d'uopo distinguere due cose: le *unità principali* e le *unità secondarie*.

Chiamansi **unità principali** quelle che hanno un nome loro proprio e contengono decine, centinaia, come le *unità semplici*, le *migliaia*, i *milioni*, i *bilioni*, ecc.

Chiamansi **unità secondarie** le suddivisioni dell'unità principale in unità, decine, centinaia, come sarebbero v. g. le *unità*, le *decine* e le *centinaia* d'unità semplici; le *unità*, le *decine* e le *centinaia* di migliaia; le *unità*, le *decine* e le *centinaia* di milioni, ecc.

24. — Ciascuna unità principale colle sue suddivisioni in *unità*, *decine* e *centinaia* forma un **periodo.**

Col sussidio della seguente tavola, riesce facile imprimere nella

---

(*) Gli antichi Autori italiani, usando denominazioni alquanto differenti, dicono: *migliaio di milioni* invece di *bilione*, *decine di migliaia di milioni* invece di *decine di bilioni*, e *centinaia di migliaia di milioni*, invece di *centinaia di bilioni*: essi chiamano poi *bilione* ciò che ora chiamano *trilione*, cioè *un milione di milioni*, e procedendo sempre nello stesso modo sino alle *centinaia di migliaia di bilioni*, vengono a chiamare *trilione* ciò che ora chiamiamo *quintilione*, e così di seguito.

memoria, i nomi e la formazione dei periodi e delle unità dei diversi ordini.

UNITÀ principali	UNITÀ SECONDARIE	ORDINI
1° Periodo Unità	Unità semplici	I *Ordine*
	Decine d'Unità semplici .	II *Ordine*
	Centinaia d'Unità semplici	III *Ordine*
2° Periodo Migliaia	Unità di Migliaia . . .	IV *Ordine*
	Decine di Migliaia . . .	V *Ordine*
	Centinaia di Migliaia . .	VI *Ordine*
3° Periodo Milioni	Unità di Milioni . . .	VII *Ordine*
	Decine di Milioni . . .	VIII *Ordine*
	Centinaia di Milioni . .	IX *Ordine*
4° Periodo Bilioni	Unità di Bilioni . . .	X *Ordine*
	Decine di Bilioni . . .	XI *Ordine*
	Centinaia di Bilioni . .	XII *Ordine*
5° Periodo Trilioni	Unità di Trilioni . . .	XIII *Ordine*
	Decine di Trilioni . . .	XIV *Ordine*
	Centinaia di Trilioni . .	XV *Ordine*
6° Periodo Quattrilioni	Unità di Quattrilioni . .	XVI *Ordine*
	Decine di Quattrilioni . .	XVII *Ordine*
	Centinaia di Quattrilioni .	XVIII *Ordine*

25. — Il sistema di numerazione ora esposto si chiama **sistema decimale** o **decadico,** perchè il numero dieci ne è la base; vale a dire che ci vogliono dieci unità d'un ordine per farne una dell'ordine immediatamente superiore, e reciprocamente ogni unità di qualsivoglia ordine si divide in dieci altre dell'ordine immediatamente inferiore. Per es., dieci unità fanno una decina, dieci decine un centinaio, dieci centinaia un migliaio, ecc.; e per contrario, un migliaio si compone di dieci centinaia, un centinaio di dieci decine, ecc.

Qualsivoglia numero potendo venir scelto per base d'un sistema di numerazione, risultano infiniti sistemi. (Tratteremo dei differenti sistemi di numerazione al N. 154).

§ 2° — NUMERAZIONE SCRITTA.

26. — La numerazione **scritta** è l'arte di rappresentare tutti i numeri, mediante una piccola serie di caratteri o segni detti **cifre.**

Nella numerazione parlata abbiamo veduto che fra le parole impiegate per esprimere i numeri, alcune indicano quante unità si hanno; altre a qual ordine appartengono queste medesime unite.

27. — Ora, la numerazione scritta dovendo raggiungere il medesimo scopo, sebbene in modo più semplice (13), risulta che:

Per rappresentare in cifre qualsivoglia numero si dovranno esprimere due cose: 1° il numero delle unità dei diversi ordini; 2° l'ordine di ciascuna specie di unità.

28. — Per indicare le unità dei diversi ordini, ossia i nove primi numeri, si fa uso dei seguenti segni che loro corrispondono:

uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove	(*)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

A queste nove cifre se ne aggiunge un'altra (0) che si chiama **zero,** la quale non ha di per sè alcun valore, ma serve a supplire gli ordini delle unità che possono mancare nell'espressione di certi numeri.

Le nove prime cifre vengono dette **significative,** e lo zero cifra **insignificativa.**

29. — Per indicare poi l'ordine di ciascuna specie di unità si parte dal principio seguente.

Principio fondamentale della numerazione scritta. *Ogni cifra collocata a sinistra d'un'altra rappresenta unità dell'ordine immediatamente superiore a quello di quest'altra cifra.*

Da questo principio riesce evidente che, se una cifra rappresenta unità semplici, la seguente (a sinistra) rappresenterà decine, l'altra centinaia, ecc.

Abbiasi da scrivere, p. es., *quarantotto*. Questo numero si compone di otto unità semplici e quattro decine, e secondo il principio precedente si scriverà 48. *Settecentocinquantasei* si compone di sei unità, cinque decine e sette centinaia; dovrà dunque essere espresso così 756. Il numero *dugentoquattro* che non contiene decine si scrive 204. I numeri *dieci, cento, mille, diecimila, centomila,* ecc., si scrivono 10, 100, 1000, 10000, 100000..... poichè la cifra 1 occupa il 2°, il 3°, il 4°, il 5°..... ordine a sinistra.

Quando si sa scrivere un numero di tre cifre, facilmente si scrivono tutti i numeri possibili; poichè essi non possono essere

---

(*) Questi segni, che si credono presi dagli Arabi, sono conosciuti da tutti i popoli, almeno Europei, che li ammisero. Sembra però che già i Cinesi, i Greci ed i Latini conoscessero la numerazione decimale scritta, e che nel decimo ed undecimo secolo questo sistema siasi perfezionato.

composti che di unità principali, di decine e di centinaia di queste unità principali, onde tutto il numero si trova composto di periodi di tre cifre ciascuno, fuorchè l'ultimo a sinistra, che può contenerne una o due soltanto.

Da quanto venne esposto sembrerebbe doversi procedere, nello scrivere i numeri, da destra a sinistra; ma per analogia a quanto si pratica nello scrivere in lettere, prevalse l'uso contrario; perciò si eseguirà la regola seguente.

30. — ***Regola per iscrivere un numero.*** *Per rappresentare con cifre un numero enunciato e scritto in lettere, si proceda da sinistra a destra, scrivendo dapprima il periodo delle più grandi unità, quindi gli altri periodi, andando sempre dal maggiore al minore, avvertendo di separare i periodi con un punto, e di supplire con zeri gli ordini mancanti.*

Abbiasi il numero *quattro bilioni seimilioni ventisettemila e cinque unità* da rappresentare in cifre. Si scrive primieramente il 4 al posto dei bilioni, il 6 al posto dei milioni, il 2 a quello delle decine di migliaia, il 7 a quello delle migliaia, ed il 5 a quello delle unità; e ponendo zeri alle colonne vacanti, si avrà 4.006.027.005.

Il numero *trecentoduemila quaranta unità* si scriverà 302,040, mettendo zeri invece delle decine di migliaia, delle centinaia e delle unità semplici che mancano nel numero proposto.

31. — ***Regola per leggere un numero.*** *Per leggere facilmente un numero scritto in cifre, si dividono queste in periodi di tre, partendo da destra; e, cominciando quindi a sinistra, si enuncia ciascun periodo, aggiungendo al medesimo il nome delle unità principali che rappresenta.*

Abbiasi da leggere il numero 84570408; lo si dividerà così: 84.570.408, e quindi si leggerà: *ottantaquattromilioni, cinquecentosettantamila, quattrocent'otto unità.*

Si divide il numero in periodi o gruppi di tre cifre, perchè le unità principali contandosi per unità, decine e centinaia, la parte del numero che si riferisce a ciascuna specie d'unità principali abbraccia tre cifre; e si principia a destra affinchè la divisione in periodi si faccia collo stesso ordine che si tenne nel formare le unità dei diversi ordini (*).

(*) Conforme però all'antico metodo indicato nell'annotazione della pag. 6, le sei prime cifre a destra d'un numero rappresenterebbero unità semplici, le sei seguenti milioni, le sei altre bilioni, dimodochè le unità principali, cioè le *unità semplici, i milioni, i bilioni, i trilioni*, ecc., si succederebbero di 6 in 6, e ciascuna *seina* o serie conterrebbe le unità, le decine, le centinaia, le migliaia, le decine di migliaia e le centinaia di migliaia dell'unità principale.

Abbiasi p. es. il numero 3187432856987472 da enunciare conforme al detto metodo. Divisolo da prima in seine diventa 3187,432856,987472 e si esprime dicendo: 3 migliaia di bilioni, 187 bilioni, 432 migliaia di milioni, 856 milioni, 987 mila, 472 unità.

Quest'esempio è più che sufficiente a fare scorgere che questo metodo *antiquato* venne abbandonato dagl'Italiani, per essere meno facile del nuovo.

Dal principio enunciato al N° 29 risulta che:

32. — Si ottiene un numero dieci, cento, mille... volte maggiore d'un altro, ponendo alla destra di quest'altro uno, due, tre... zeri.

Sia p. es. il numero 54; mettendo uno zero si avrà 540, che è dieci volte maggiore del 54, perchè il 4 che prima esprimeva solo unità, ora esprime 4 decine, ed il 5 che esprimeva decine, ora esprime centinaia; dunque, siccome ciascuna cifra esprime unità 10 volte maggiori, così il secondo numero è 10 volte maggiore del primo. Parimenti se si aggiungono tre zeri a destra del 32, si ha 32000, numero mille volte più grande.

Vedesi in questi esempi che una medesima cifra cambia valore col cambiar di posto; da ciò s'inferisce che:

33. — Le cifre hanno due valori, l'uno **assoluto** e l'altro **relativo;** il valore assoluto d'una cifra è quello che ha considerata da sè sola, ed il valore relativo è quello che le viene dal posto che occupa.

Così in 8042 il valore assoluto della prima cifra a sinistra è otto, ed il suo valore relativo otto migliaia, essendo essa al quart'ordine; il valore assoluto della terza cifra è quattro, ed il valore relativo quattro decine, essendo essa al second'ordine; il 2 che occupa l'ordine delle unità, non ha che il suo valore assoluto.

§ 3° — NUMERAZIONE DEI DECIMALI.

Abbiamo già osservato (25) che un migliaio vale 10 centinaia, un centinaio 10 decine, una decina 10 unità; immaginando ora che l'unità sia pure divisa in 10 parti uguali, ne risulteranno nuove unità chiamate **decimi;** un decimo pure diviso in 10 parti uguali darà **centesimi;** il centesimo diviso parimente in 10 parti uguali darà **millesimi;** e continuando a suddividere così, si formeranno successivamente dei **decimillesimi, centomillesimi, milionesimi,** ecc. Queste suddivisioni dell'unità prendono il nome di **frazioni decimali** o semplicemente **decimali.**

34. — Si chiamano **decimali** quelle parti che sono dieci, cento, mille... volte minori dell'unità, e che successivamente sono di dieci in dieci volte più piccole le une delle altre.

35. — Per distinguere in un numero la parte intera dalla parte decimale, si pone dopo le unità semplici il segno (,) chiamato *virgola decimale.*

Il decimo essendo la decima parte dell'unità deve porsi (29) a destra della cifra delle unità; il centesimo che è

la decima parte del decimo, vuol essere collocato a destra della cifra dei decimi, ecc.

Risulta dunque che la prima cifra a destra della virgola rappresenta decimi, la seconda centesimi, la terza millesimi, ecc.

Così nel numero 26,345, le due cifre 26 poste a sinistra della virgola dinotano ventisei unità intere; passando poi a destra della virgola la cifra 3 indica decimi, il 4 centesimi, e il 5 millesimi, onde il numero si potrà esprimere dicendo: *ventisei unità, tre decimi, quattro centesimi, cinque millesimi.*

36. — Un numero composto di una parte intera e di una parte decimale si chiama **numero decimale.**

Tal è il numero 28,47; 28 è la parte intera e 47 la decimale.

37. — Un numero composto di sole parti decimali si chiama **frazione decimale.**

Tale sarebbe il suindicato numero, se le 28 unità non ne facessero parte, ed in tal caso si scriverebbe 0,47.

38. — Le cifre poste alla destra della virgola si chiamano **cifre decimali.**

39. — ***Regola per iscrivere un numero decimale.*** *Per iscrivere in cifre un numero decimale, si scrive prima la parte intera alla cui destra si mette la virgola, poscia la frazione decimale, collocando successivamente i decimi, i centesimi, ecc.; se manca qualche ordine di decimali, si mette uno zero nel posto corrispondente, e se il proposto numero non ha interi, al loro posto si mette uno zero seguito da virgola.*

Così il numero ventiquattro unità, sei centesimi, cinque millesimi si scriverà 24,065.

40. — ***Regola per leggere un numero decimale.*** *Per leggere un numero decimale, si esprime primieramente la parte intera come se fosse sola, quindi la parte decimale come fosse un numero intero, esprimendo alla fine dell'enunciato il nome delle unità dell'ultima cifra a destra* (*).

Sia il numero 56,375; la parte decimale contiene:

1° 3 decimi, ovv. 30 centesimi, ovv. 300 millesimi,
2° ..... 7 id. ovv. 70 id.
3° ..... 5 id.

(*) Per conoscere la natura dell'ultima cifra, si dividono le cifre decimali in periodi tre cominciando dall'unità, come si è fatto per gl'interi. Sia il numero 42,657801040647; scomponendolo come fu detto, si ha 42,65.780.104.064.7 di cui il primo periodo contiene *unità, decimi* e *centesimi* d'unità semplici; il secondo, *unità, decimi* e *centesimi* di millesimi, il terzo, *unità, decimi* e *centesimi* di milionesimi, ecc.

Alcuni autori sogliono, nella spartizione in periodi, cominciare dai decimi, onde scriverebbero il suddetto numero 42,657.801.040.647; ma questo metodo ha minore analogia con quello adoperato negl'interi.

Onde segue che si hanno 56 unità, 375 millesimi.

Si potrebbero pure unire gl'interi colle cifre decimali, e fare un solo enunciato, poichè 56 unità valgono 56000 millesimi; ed il numero totale si enuncerebbe 56375 millesimi, dando sempre all'ultima cifra a destra il nome dell'ultima suddivisione decimale.

41. — Non cangiasi il valore d'un numero decimale, aggiungendo o sopprimendo alla sua destra qualsivoglia numero di zeri.

Questo risulta dalla natura stessa del numero decimale. Sia per esempio 5,24; aggiungendo uno zero alla sua destra, si avrà 5,240.

Ora, in questo nuovo numero ciascuna cifra rappresentando unità dello stesso ordine di prima, non ha cambiato valore; quindi l'intero numero ha pure lo stesso valore.

Analogo ragionamento si fa per la soppressione degli zeri, v. g. 0,036000 equivalgono a 0,03600, ovvero a 0,0360, ovvero a 0,036.

42. — Dato un numero decimale, se ne ottiene un altro 10, 100, 1000..... volte maggiore, trasportando la virgola uno, due, tre.... ordini verso destra.

Sia il numero 264,576; avanzando la virgola due ordini verso la destra, si ottiene il numero 26457,6. Ora è chiaro che ciascuna cifra di questo numero rappresenta unità 100 volte maggiori di quelle del primo; p. es. la cifra 4 che prima esprimeva solamente unità ora rappresenta centinaia, il 5 che esprimeva soltanto decimi, ora esprime decine, ecc. Dunque il secondo numero è 100 volte maggiore del primo.

43. — Dato un numero decimale, se ne ottiene un altro 10, 100, 1000.... volte più piccolo, trasportando la virgola uno, due, tre... ordini verso sinistra.

Abbiasi il numero 537,25; trasportando la virgola un ordine verso la sinistra si otterrà 53,725, che è 10 volte più piccolo.

Se il numero dato è intero, per ottenerne uno 10, 100, 1000.... volte minore, basta separare colla virgola una, due, tre... cifre a destra del numero dato.

Così per avere un numero dieci volte più piccolo di 84, basta mettere una virgola alla sinistra del 4, il che dà 8,4.

44. — Quando si cerca un numero 10, 100, 1000.... volte minore di un altro, se il numero dato non ha cifre sufficienti a sinistra della virgola, si mettono tanti zeri, quanti ne richiede l'operazione, ed uno di soprappiù per tenere le veci delle unità.

Onde per ottenere numeri rispettivamente mille volte minori di 8 e di 2,625, si scriverà 0,008 e 0,002625.

Tavola sinottica del Sistema di numerazione.

Progressione ascendente																					*Progressione discendente.*
Centinaia di quattrilioni																					
Decine di quattrilioni																					
QUATTRILIONI																					
Centinaia di trilioni																					
Decine di trilioni																					
TRILIONI																					
Centinaia di bilioni																					
Decine di bilioni																					
BILIONI																					
Centinaia di milioni																					
Decine di milioni																					
MILIONI																					
Centinaia di migliaia																					
Decine di migliaia																					
MIGLIAIA																					
Centinaia d'unità																					
Decine d'unità																					
UNITA'	4	0	0.	0	5	0.	0	8	6.	0	0	0.	2	7	6.	7	0	8,	4	2.	0
Decimi		6	0.	6	0	0.	0	4	0.	0	0	0.	0	0	4.	5	7	9,	0	0.	6
Centesimi			3.	4	7	3.	5	2	7.	8	6	4.	1	9	8.	6	4	1,	7	6.	2
MILLESIMI																					
Decimillesimi																					
Centomillesimi																					
MILIONESIMI																					
Decimilionesimi																					
Centomilionesimi																					
BILIONESIMI																					
Decibilionesimi																					
Centobilionesimi																					

§ 4° — DELLE CIFRE ROMANE.

51. — I Romani per iscrivere i numeri si servivano dei sette seguenti caratteri detti **cifre romane,** che noi adoperiamo tuttora per rappresentare i numeri d'ordine.

I	ovvero **i, j**	che significa	*uno*	C	ovvero **c**	che significa	*cento*
V	» **v**	»	*cinque*	D	» **d**	»	*cinquecento*
X	» **x**	»	*dieci*	M	» **m**	»	*mille*
L	» **l**	»	*cinquanta*				

52. — Per iscrivere i numeri con questi caratteri si convenne: 1° che una cifra collocata alla destra di un'altra di maggior valore si sommerebbe con essa; 2° che una cifra collocata alla sinistra di un'altra ad essa superiore diminuirebbe il valore della cifra superiore di un valore uguale a quello della cifra inferiore; 3° che una lineetta orizzontale posta sovra una cifra la farebbe valere mille volte più; due lineette un milione di volte più ecc.

Così	II	significa	2	XC	significa		90
	IV	»	4	CIX	»		109
	VIII	»	8	DC	»		600
	XIX	»	19	DCCIX	»		709
	XL	»	40	MCD	»		1400
	LX	»	60	$\overline{\text{MM}}\,\overline{\text{V}}$	»		2005000
	LXXIV	»	74	MDCCCLXVII	»		1867

S'indicano pure i numeri 500, 1000, 5000, 10000,
rispettivamente coi caratteri Ↄ, ↀ, ↁ, ↂ.
L'anno 1867, già scritto sopra, potrebbe pertanto scriversi:
ↀↃↃↃↀↀↀↃLXVII.

CAPO II.

OPERAZIONI FONDAMENTALI

Definizioni e segni.

53. — La **Definizione** è proposizione intesa a far conoscere la natura d'una cosa, od il senso d'un vocabolo.

54. — L'**Assioma** è proposizione che contiene una verità evidente per se stessa, cioè che si comprende senza dimostrazione.

Gli assiomi principali dell'Aritmetica sono:

1° Il tutto è maggiore di una delle sue parti.

2° Il tutto è uguale alla somma di tutte le sue parti.

3° Due quantità uguali, aumentate o diminuite d'una medesima quantità danno risultati uguali.

4° Due quantità uguali, moltiplicate o divise per una medesima quantità, danno risultati uguali.

5° Due quantità uguali ad una terza, sono uguali fra loro.

6° Due quantità disuguali conservano la stessa differenza, quando entrambe si aumentano o si diminuiscono d'una stessa quantità.

55. — Il **Teorema** è proposizione che contiene una verità, la quale si rende evidente mediante dimostrazione.

56. — Il **Corollario** è conseguenza che si deduce da una o più verità dimostrate.

57. — Il **Problema** è proposizione nella quale si propone una questione da risolvere.

58. — ***Segni adoperati in Arilmetica.***

SEGNI	SIGNIFICATI	ESEMPI
$+$	più	$8 + 7$ significa 8 più 7
$-$	meno	$9 - 5$ » 9 meno 5
$\times$	moltiplicato per	3×7 » 3 moltipl. 7
$:$ ovv. $-$	diviso per . . .	$7 : 4$ ovv. $\frac{7}{4}$ » 7 diviso per 4
$=$	uguaglia	$5 + 3 = 8$ » 5 più 3 ug. 8
$\sqrt[2]{\ }$ ovv. $\sqrt{\ }$	radice quadrata	$\sqrt[2]{8}$ ovv. $\sqrt{8}$ » rad.quadr. di 8
$\sqrt[3]{\ }$	radice cubica . .	$\sqrt[3]{27}$ » rad. cub. di 27
$>$	maggiore di . .	$9 > 4$ » 9 magg. di 4
$<$	minore di	$6 < 7$ » 6 minore di 7

Le parentesi ( ) fanno considerare come eseguite le operazioni indicate sulle quantità in esse racchiuse.

59. — Dicesi **Uguaglianza** l'espressione di due quantità uguali, come $8 + 6 = 16 - 2$.

E si chiama **Disuguaglianza** l'espressione di due quantità disuguali, come

$$4 + 10 > 12 - 3 \text{ e } 20 - 8 < 9 + 6.$$

§ 1° — ADDIZIONE.

60. — L'**Addizione** è un'operazione per cui, dati più numeri della medesima specie, si riuniscono in un solo.

I numeri da riunirsi si chiamano **poste:** il risultato poi dell'operazione si dice **somma** o **totale,** ed è della medesima specie delle poste.

61. — Poichè il totale dell'addizione risulta dalla riunione dei numeri proposti, esso contiene tutte le parti dei medesimi; da ciò risulta il seguente principio, su cui poggia tutta la teorica dell'addizione.

Per sommare più numeri, si possono scomporre in parti, som-

mare separatamente queste parti e riunire insieme le somme risultanti.

Si possono considerare come parti d'un numero, o le unità semplici di cui consta, o le unità dei diversi ordini.

Quindi si avrà,

giusta il 1° modo $5 = 1+1+1+1+1$
» 2° » $724 = 700+20+4$
(assioma 2°, n. 54).

62. — L'addizione può presentare tre casi principali:

1° Sommare numeri d'una sola cifra.
2° Sommare numeri di più cifre.
3° Sommare numeri decimali.

63. — I° ***Caso.*** **Addizione di numeri di una sola cifra.**

Abbiasi da sommare 9, 4, 3 e 5.

Quest'addizione consiste (61) nel riunire tutte le parti dei numeri 9, 4, 3 e 5. Si aggiungeranno adunque, contandole sulle dita,

1° al 9 le unità del 4, il che dà $9+1+1+1+1=13$
2° al 13 » 3, » $13+1+1+1=16$
3° al 16 » 5, » $16+1+1+1+1+1=21$

Tuttavia, siccome l'aggiungere così una ad una le unità riuscirebbe oltremodo lungo e fastidioso, convien saper aggiungere in un tratto tutte quelle d'una medesima cifra, in questo modo: 9 e 4 fanno 13, e 3 fanno 16, e 5 fanno 21.

Tutti i casi dell'addizione si riducono, come si vedrà, a questo primo; il perchè molto importa l'acquistare in esso facilità e speditezza.

64. — II° ***Caso.*** **Addizione di numeri composti di più cifre.**

Abbiasi da sommare le seguenti poste: 432, 254, 103.

Secondo il principio del n° 61, si risolvono i tre numeri dati nelle unità dei diversi ordini, e si sommano insieme quelle d'un ordine medesimo, come si vede nel quadro *(a)*; si ottengono così 7 centinaia, 8 decine e 9 unità, ossia 789 unità.

Questo numero è la somma richiesta, perchè, contenendo tutte le parti dei numeri proposti, esso contiene i numeri medesimi.

(a)

Unità $2+4+3=9$
Decine $3+5+0=8$
Centin. $4+2+1=7$

(b)

4 3 2
2 5 4
1 0 3
7 8 9

In pratica si opera come segue:

Scritti i numeri gli uni sotto gli altri, in guisa che le unità del medesimo ordine si trovino in una stessa colonna, come nel

quadro (*b*), e tirata una linea orizzontale, comincio dalla 1ª colonna a destra, dicendo: 2 e 4 fanno 6, e 3 fan 9, scrivo la cifra 9 sotto le unità: passando alla 2ª colonna, 3 e 5 fanno 8 che scrivo sotto le decine; finalmente nella 3ª colonna, 4 e 2 fanno 6, e 1 fanno 7 che scrivo sotto le centinaia.

65. — Allorchè i numeri proposti sono tali che la somma delle unità d'un medesimo ordine (ossia d'una medesima colonna) è maggiore di 9, cioè un numero di due cifre, per es. 42, la seconda cifra 4 rappresenta unità dell'ordine immediatamente superiore a quello che si è sommato, perciò si scriverà solamente la prima 2, ed aggiungerassi l'altra a quelle dell'ordine seguente.

Sia proposto per secondo esempio di sommare le quattro seguenti poste: 2842, 3598, 7359 e 9854.

Disposta al solito l'operazione e sommate le unità, ottengo 23, cioè 2 decine e 3 unità; scrivo le 3 unità e ritengo le due decine che sommo colle cifre della colonna seguente, il che dà 25, cioè 2 centinaia e 5 decine; scrivo le 5 decine e ritengo le 2 centinaia per sommarle colle cifre della colonna seguente, ecc.

2842
3598
7359
9854
23653

Il numero 23653 così ottenuto contiene evidentemente tutte le parti dei numeri proposti. Dunque esso è la somma richiesta.

66. — III° ***Caso.*** **Addizione di numeri decimali.**

Per sommare numeri decimali si opera come nei numeri interi; cioè si scrivono le poste le une sotto le altre, per modo che le unità siano sotto le unità, le decine sotto le decine, ecc., i decimi sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, ecc.

Abbiasi da sommare 24,25; 8,50; e 213,04.

Disposta l'operazione, comincio dall'ultima colonna a destra, dicendo: 5 e 4 fan 9 centesimi, che pongo sotto la colonna dei centesimi; 2 e 5 fan 7 decimi che scrivo; pongo poi la virgola per separare la parte intera dalla decimale; e pel rimanente opero come al 2° caso.

24,25
8,50
213,04
245,79

67. — Dal sin qui esposto si deduce la seguente

Regola. — *Per sommare più numeri, scrivonsi gli uni sotto gli altri, per modo che le unità dello stesso ordine si trovino nella medesima colonna; tirasi quindi una linea orizzontale per separarli dal risultato, il quale si scriverà sotto. Si sommano dapprima tutte le cifre dell'ultima colonna a destra; se il totale non eccede 9, lo si scrive sotto questa colonna; se sorpassa 9, si pongono solamente le unità eccedenti una, due, tre... decine, e si portano le decine alla colonna seguente. Si opera nello stesso modo sopra ciascuna delle altre colonne fino all'ultima, sotto cui si pone il risultato quale si ha dalla somma.*

Se la somma delle unità di una colonna uguaglia 10, 20, 30... si pone zero, e si porta 1, 2, 3... alla colonna seguente.

68. — ***Osservazione.*** Si comincia l'addizione dalla destra, affine di portar alla colonna seguente le decine che provengono dalla somma della colonna precedente. Tuttavia si potrebbe cominciare da una colonna qualsiasi, anche dalla sinistra, se la somma delle cifre di ciascuna colonna non eccedesse 9.

Quand'anche la somma di ciascuna colonna eccedesse 9, si potrebbe pur cominciare dalla sinistra; ma l'operazione sarebbe più lunga; perchè le decine ritenute non potrebbero essere riportate alla colonna precedente, già sommata, epperò bisognerebbe o cangiare la cifra già scritta, o far una nuova addizione.

69. — ***Prova dell'Addizione.*** Chiamasi **prova** di un'operazione una seconda operazione che serve a *verificare* la prima.

La prova dell'addizione si può fare in parecchi modi; ne accenniamo due.

1° Col rifare l'addizione, ma procedendo di basso in alto; il risultato dev'essere eguale a quello della prima operazione, poichè esso è un tutto composto delle medesime parti, benchè disposte in ordine diverso.

2° Col riunire una parte delle poste, quindi l'altra parte e sommare i due totali; per la ragione testè addotta, la loro somma dev'essere uguale al totale della prima operazione.

Problemi sull'Addizione.

1. Pompilio lavorò quattro anni in una miniera: nel 1° risparmiò ll. 250,35, nel 2° ll. 341,80, nel 3° ll. 189,50, nel 4° lire 54. Quanto risparmiò in tutto?

2. Clemente in un anno raccolse 45 El. di vino, che vendè ll. 987,60, e in un altro 52 El. che gli fruttarono ll. 1204,50. Dicasi quanti El. raccolse in tutto, e quante lire ricavò.

3. Per una pezza di panno do una pezza di tela del valore di ll. 147,25 e ll. 467,40 in contanti. Quanto vale il panno?

4. Cipriano rivende panno per ll. 6218,50 e vi perde lire 143,40; quanto gli costava?

5. Una merce costa ll. 2458; quanto bisogna rivenderla per guadagnarvi ll. 367?

6. Emilio guadagnò ll. 150 rivendendo 740 Cg. di robbia, che gli costava ll. 840; quanto avrebbe dovuto rivenderla per guadagnarvi il doppio?

7. Tre persone si divisero una somma: la 1ª ebbe ll. 4368, la 2ª ll. 540 di più, la 3ª ll. 54 più delle altre due insieme, e

rimasero ll. 27; dicasi quanto toccò a ciascuna e qual fosse la somma spartita.

8. Umberto ha cinque poderi: nel 1° raccolse El. 50 di frumento; nel secondo El. 72 di più; nel 3° tanto quanto nei due primi insieme; nel 4° quanto nel 1° e nel 3° insieme, e nel 5° El. 7 più che nei due primi insieme. Quanti El. in tutto?

9. Un numero è tale che diminuendolo di 6487, diventa 5976; qual è questo numero?

10. Nel 1825 si ammendò un terreno spargendovi 2 El. di marna; se tale operazione vuol essere ripetuta ogni 22 anni, in qual anno avrà nuovamente luogo?

11. Un padre aveva 30 anni alla nascita del figliuolo; qual sarà la sua età quando il figlio avrà 37 anni?

12. Tito, nato nel 1859, deve percepire un'eredità giunto che sia a 30 anni; in qual anno la riscuoterà?

§ 2° — SOTTRAZIONE.

70. — La **sottrazione** è un'operazione per cui, dati due numeri della medesima specie, si toglie il *minore* dal *maggiore*.

I due numeri dati si dicono *termini* della sottrazione.

Il numero maggiore, cioè quello da diminuirsi, si chiama **minuendo**, ed il minore, cioè quello da sottrarsi, si chiama **sottraendo**.

Il risultato poi della sottrazione dicesi **resto** o **residuo**; esso indica l'*eccesso* del numero maggiore sul minore, ossia la *differenza* dei due numeri.

71. — Poichè il resto della sottrazione risulta dal minuendo diminuito dal sottraendo, esso contiene tutte le parti di quello *meno* tutte le parti di questo; da ciò risulta il seguente principio, su cui poggia tutta la teorica della sottrazione.

Per sottrarre un numero da un altro, si possono scomporre entrambi in parti, sottrarre le parti del sottraendo da quelle del minuendo, e riunire i resti parziali.

72. — La sottrazione può presentare tre casi principali:

1° Quando ciascuna cifra del minuendo è maggiore di quella del medesimo ordine nel sottraendo.

2° Quando qualche cifra del minuendo è minore di quella del medesimo ordine nel sottraendo.

3° Quando i numeri proposti contengono decimali.

73. — I° ***Caso.*** **Quando ciascuna cifra del minuendo è maggiore di quella del medesimo ordine nel sottraendo.**

Abbiasi da sottrarre 2726 da 3856.

Giusta il principio del N. 71, si risolvono i due numeri dati nelle unità dei diversi ordini, si levano le unità del sottraendo da quelle del medesimo ordine nel minuendo, come si vede nel sottostante quadro (*a*); si ottiene così un migliaio, 1 centinaio, 3 decine e 1 unità, ossia 1131. Questo numero è il residuo richiesto, perchè contenendo tutte le parti del minuendo, *meno* tutte quelle del sottraendo, esso contiene il primo diminuito del secondo.

(*a*)

Unità	6 — 5 = 1
Decine	5 — 2 = 3
Centinaia	8 — 7 = 1
Migliaia	3 — 2 = 1

(*b*)

Minuendo	3 8 5 6
Sottraendo	2 7 2 5
Residuo	1 1 3 1

In pratica si opera come segue:

Scritto il sottraendo sotto il minuendo, in modo che le unità d'un medesimo ordine siano le une sotto le altre, come vedesi nel quadro (*b*), e tirata una linea orizzontale, si comincia dalla destra dicendo: 5 da 6 1 (cioè *levando* 5 da 6 *resta* 1), che scrivo sotto le unità; 2 da 5 3, che scrivo sotto le decine; 7 da 8 1, che scrivo sotto le centinaia; 2 da 3 1, che scrivo sotto le migliaia.

74. — II° ***Caso.*** **Quando qualche cifra del minuendo è minore di quella del medesimo ordine nel sottraendo.**

Allorchè una cifra del minuendo è minore di quella che le corrisponde nel sottraendo, essa aumentasi di 10 unità, e si diminuisce d'un'unità la seguente a sinistra.

Venga proposto di sottrarre 5279 da 8653.

Non potendosi da 3 levare 9, si scompongono le 5 decine del minuendo in 4 decine e 10 unità che unite alle 3 fanno 13 unità; essendo del pari impossibile la sottrazione delle decine, si scompongono le 6 centinaia in 5 centinaia e 10 decine che unite alle 4 fanno 14 decine. In tal modo il minuendo trovasi scomposto in parti, di cui ciascuna è maggiore della corrispondente nel sottraendo, come scorgesi nel quadro (*c*); cosicchè la sottrazione si potrà effettuare come nel 1° caso.

(*c*)

Unità	13 — 9 = 4
Decine	14 — 7 = 7
Centinaia	5 — 2 = 3
Migliaia	8 — 5 = 3

(*d*)

Minuendo	8 6 5 3
Sottraendo	5 2 7 9
Residuo	3 3 7 4

In pratica si scompone il minuendo nell'atto stesso che si fa la sottrazione, operando in questo modo, quadro (*d*): 9 da tre non si può (cioè: non si può *levare* 9 da 3), tolgo *in prestito* dalla cifra seguente 1 decina che vale 10 unità, le quali unite a 3 fanno 13; 9 da 13 4, che scrivo sotto le unità; 7 da 4 non si può, tolgo *in prestito* dalla cifra seguente 1 centinaio che vale 10 decine, le quali unite a 4 fanno 14; 7 da 14 7, che scrivo sotto le decine; ecc.

75. — Se una cifra del minuendo, minore di quella che le corrisponde nel sottraendo, è preceduta a sinistra da uno o più zeri, essa aumentasi di 10 unità, e gli zeri si considerano come altrettanti 9.

Vogliasi p. es. sottrarre 486 da 4003.

Non potendosi da 3 unità levarne 6, nè togliere *in prestito* dalle decine e dalle centinaia, si scompongono le 4 migliaia in 3 migliaia e 10 centinaia; queste 10 centinaia in 9 centinaia e 10 decine; queste 10 decine, in 9 decine e 10 unità. In tal guisa il minuendo trovasi scomposto in 3 migliaia, 9 centinaia, 9 decine e 13 unità.

$$\begin{aligned} 13 - 6 &= 7 \\ 9 - 8 &= 1 \\ 9 - 4 &= 5 \\ 3 - 0 &= 3 \end{aligned}$$

In pratica si fa la scomposizione mentalmente, come fu detto al N. 74.

76. — ***Altro modo di eseguire la Sottrazione nel 2° caso.*** Dopo aver aumentato di 10 una cifra del minuendo (74), invece di diminuire d'una unità la seguente a sinistra, si può aumentare d'un'unità quella che le corrisponde nel sottraendo.

In fatti, i due termini della sottrazione, vengono con ciò aumentati ciascuno d'un'unità del medesimo ordine, onde la loro differenza rimane la stessa (assioma 6°, N. 54).

Riprendiamo l'esempio del n° 74.

(*m*)

Unità	13 − 9	= 4
Decine	15 − (7 + 1)	= 7
Centinaia	6 − (2 + 1)	= 3
Migliaia	8 − 5	= 3

(*n*)

Minuendo	8 6 5 3
Sottraendo	5 2 7 9
Residuo	3 3 7 4

Disposta al solito l'operazione, dico: 9 da 3 non si può, 9 da 13 resta 4; aggiungo 1 al 7 che fa 8, il quale tolto da 15 dà 7; aggiungo 1 al 2 che fa 3; 3 da 6 3; 5 da 8 3.

Il minuendo ed il sottraendo vennero così aumentati, prima d'una decina, poi d'un centinaio, come vedesi nel quadro (*m*).

Questo modo di effettuare la sottrazione ricevette il nome di *metodo senza prestito*, in opposizione al primo chiamato *metodo con prestito*.

Osservazione. — Invece di aumentare di 10 la cifra troppo piccola del minuendo, potrebbesi aumentarla di 20, 30, 40, ecc., purchè si aumenti poi di 2, 3, 4, ecc., quella dell'ordine immediatamente superiore nel sottraendo. Così si suol fare nella divisione (v. N. 130).

77. — III. ***Caso.*** **Sottrazione di numeri decimali.** Nella sottrazione dei numeri decimali si opera come negl'interi, avvertendo di separare colla virgola la parte intera dalla decimale; se uno dei due numeri decimali ha meno cifre dell'altro, vi si supplisce aggiungendovi zeri.

Abbiasi da levare 28,344 da 146,4.	Sia ancora da levare 6,92 da 7,724.
146, 400	7, 724
28, 344	6, 920
118, 056	0, 804

Se il residuo non ha interi, si pone in loro vece uno zero, come si vede nell'ultimo esempio.

78. — ***Regola.*** *Per sottrarre un numero da un altro, si scrive il minore sotto il maggiore, per modo che le unità del medesimo ordine si corrispondano, quindi si tira una linea per separare il risultato. Poscia cominciando dalla destra si levano successivamente le unità, decine, centinaia..... del numero inferiore dalle unità, decine, centinaia..... del superiore e si pone ciascun risultato parziale sotto la colonna corrispondente. Quando la cifra inferiore è maggiore della corrispondente superiore, si prende in prestito un'unità dalla prima cifra a sinistra, la quale poi si considera come diminuita di un'unità. Allorchè la cifra superiore è più piccola della corrispondente inferiore, ed è preceduta da uno o più zeri, si prende in prestito dalla prima cifra significativa che si trova prima degli zeri, ed a ciascun zero si sostituisce col pensiero la cifra che rappresenta 9 unità dell'ordine di cui lo zero tiene il posto.*

79. — ***Osservazione.*** Si comincia la sottrazione dalla destra e non dalla sinistra, per eseguire i prestiti necessari; il che, se si fosse già fatta la sottrazione delle unità dell'ordine superiore, non si potrebbe fare se non col ricominciare la sottrazione da tale cifra, la qual cosa riuscirebbe assai lunga e difficile. Però se ciascuna delle cifre del numero inferiore fosse minore della cifra corrispondente del numero superiore, si potrebbe cominciare indifferentemente dalla destra o dalla sinistra.

80. — ***Prova della Sottrazione.*** La prova della sottrazione si può fare in due maniere: *coll'addizione* o *colla sottrazione.*

1° Coll'*addizione*, riunendo il sottraendo col residuo; la somma dev'essere uguale al minuendo. *Esempio :*

Minuendo	814
Sottraendo	367
	447
Prova	814

Questo non può essere altrimenti ; poichè aggiungendo ad un numero la differenza tra esso ed un altro maggiore, la somma deve necessariamente uguagliare il numero maggiore.

2° Colla *sottrazione*, cioè levando il residuo dal minuendo ; il nuovo risultato dovrà essere uguale al sottraendo.

Ciò è chiaro; poichè il residuo indica l'eccesso del minuendo sul sottraendo ; se adunque si leva questo eccesso dal minuendo si dovrà avere necessariamente il sottraendo.

Relazione tra l'Addizione e la Sottrazione

81. — Nel fare la sottrazione, il minuendo risulta scomposto in due parti ; poichè una si toglie (il sottraendo), un'altra rimane (il residuo). Ma la somma delle parti è uguale al *tutto* (54 — 2°) ; dunque sommando il residuo col sottraendo si otterrà il minuendo.

Da ciò conchiudesi che :

Colla sottrazione un numero viene scomposto, e coll'addizione il medesimo numero si ricompone (10).

Queste due operazioni sono pertanto l'una all'altra *inverse* ; ed esse possono ancora definirsi :

82. — L'**Addizione** è l'operazione per cui, date le parti, si trova il *tutto*, cioè la somma.

83. — La **Sottrazione** è l'operazione per cui, dato il *tutto*, cioè la somma, ed una delle parti, si trova l'altra parte.

Supponiamo che per mezzo di un'addizione siasi ottenuto il totale di parecchi numeri ; se ora, tralasciando uno di questi numeri, sommiamo nuovamente tutti gli altri, otterremo un nuovo totale che sarà una parte del primo, mentre l'altra parte sarà il numero tralasciato. Questo numero dovrassi adunque ottenere per residuo, se dal primo totale sottraggasi il secondo.

84. — Si può da ciò dedurre un

Altro modo di verificare l'Addizione. — La prova dell'addizione si può fare col sommare tutte le poste

meno una (riesce più comodo tralasciare quella che si è scritta la prima), e sottrarre quindi questa somma dal totale primitivo ; il residuo dev'essere uguale al numero tralasciato. *Esempio :*

	406702
	18098
	700980
	94323
Somma di tutte le poste	1220103
» *delle tre ultime*	813401
Differenza delle due somme, ug. alla 1ª posta	406702

Del complemento aritmetico.

85. — Il **Complemento aritmetico** d'un numero è il resto che si ottiene sottraendo quel numero dall'unità dell'ordine immediatamente superiore a quello dell'ultima sua cifra a sinistra.

Per es. il compl. arit. di 4782 è il resto della sottrazione di 4782 da 10000, ossia da 9990 + 10. Da ciò si vede che :

86. — Il complemento aritmetico d'un numero si ottiene sottraendo ciascuna delle sue cifre da 9, fuorchè l'ultima a destra che sottraesi da 10.

Quindi la ricerca del complemento non esige verun calcolo ; esso può scriversi cominciando a sinistra non altrimente che se venisse dettato.

Venga proposto, p. e., di trovare il compl. di 3584 ;

Dico: 3 da 9 6, 5 da 9 4, 8 da 9 1, 4 da 10 6; onde il complemento di 3584 è 6416.

In pari modo si trova che i numeri 302 ; 47000 ; 35005 hanno per complementi rispettivi..... 698 ; 53000 ; 64995.

87. — Il complemento si dice *al* 10, *al* 100, *al* 1000, ecc., secondo che il numero viene sottratto da 10, da 100, da 1000, ecc.

Nelle frazioni decimali il complemento si suol prendere *all'unità semplice ;* quindi i complementi di 0,75; 0,000405, saranno 0,25; 0,999595.

88. — ***Scopo del Complemento aritmetico.*** Il complemento aritmetico serve a convertire le sottrazioni in addizioni.

Abbiasi da sottrarre 789 da 8543.

La differenza 8543 — 789 non si altera (54 — 6°) ove si aggiunga a ciascun termine un medesimo numero. Aggiungiamo 1000, cioè l'unità dell'ordine superiore, al sottraendo; avremo

$$\begin{aligned} 8543 - 789 &= (8543 + 1000) - (789 + 1000) \\ &= 8543 + 1000 - 789 - 1000 \\ &= 8543 + (1000 - 789) - 1000. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione mostra che si otterrebbe la differenza richiesta coll'aggiungere a 8543, che è il minuendo, la quantità racchiusa nelle parentesi, e dalla somma togliere 1000. Ora la quantità racchiusa nelle parentesi altro non è che il complemento aritmetico di 789, cioè del sottraendo. Dunque:

89. — **Regola.** *Per sottrarre un numero da un altro, si aggiunge al minuendo il complemento aritmetico del sottraendo, e dalla somma si toglie l'unità a cui si è preso il complemento.*

L'operazione dell'esempio precedente si disporrebbe come segue:

Minuendo	8543
Compl. del sottr.	211
Residuo	7754

90. — L'uso del complemento aritmetico presenta maggior vantaggio in quei calcoli, ne' quali per ottenere un solo risultato si richiedono molte addizioni e sottrazioni; perchè con esso tutto si riduce ad una sola addizione.

Abbiasi da calcolare la seguente espressione:

$$3048 - 75{,}05 - 614{,}15 + 4{,}9405 - 0{,}95 - 2{,}7905.$$

Adoperando i metodi ordinari dell'aritmetica, converrebbe dalla somma del primo e del quarto numero, togliere successivamente ciascuno degli altri; ma in forza della regola precedente, basterà aggiungere a detta somma successivamente il complemento di ciascuno dei sottraendi, togliendo ad ogni volta un'unità dell'ordine di quella a cui si è preso il complemento. Ora due cose convien qui osservare:

1° Invece di sopprimere volta per volta le unità, è più semplice sopprimerle tutte nel risultato finale;

2° Poichè nel proposto esempio la parte intera dei sottraendi non consta in tutti d'un medesimo numero di cifre, i complementi si dovrebbero prendere ad unità d'ordini differenti; p. es. quello di 75,05 al 100, quello di 614,15 al 1000, ecc.; e per conseguenza bisognerebbe nel risultato togliere unità di differenti ordini: 1 centinaio, 1 migliaio, ecc.; la qual cosa riuscirebbe incomoda assai. Si suole in tal caso prendere tutti i complementi all'unità del medesimo ordine, cioè di quello immediatamente superiore al maggiore dei sottraendi. Basta quindi sopprimere tante unità di quell'ordine quanti si aggiunsero complementi.

Ciò posto, si prenderanno in questo esempio i complementi al

1000, perchè il maggiore dei sottraendi è 614,15; e l'operazione sarà la seguente:

	3048
	4,9405
Comp. di 75,05	924,95
» 614,15	385,85
» 0,95	999,05
» 2,7905 ...	997,2095
Risultato	2360,0000 (dopo aver soppresso 4 migliaia).

91. — Dal suesposto s'inferisce la seguente

Regola. — *Per sottrarre più numeri da un altro o dalla somma di più altri, si fa una sola addizione, le cui poste sono i numeri minuendi ed i complementi aritmetici de' numeri sottraendi, presi all'unità dell'ordine immediatamente superiore al maggiore dei sottraendi; e dalla somma si tolgono tante unità di quel medesimo ordine quanti sono i complementi.*

Problemi sulla Sottrazione.

13. Ermanno, il quale doveva ll. 867,85, recò al creditore una borsa in cui diceva essere l'intera somma, mentre non conteneva che ll. 698,15: il creditore trovandosi occupato ritirò senz'altro la borsa e gliene rilasciò ricevuta. Di quanto fu egli defraudato?

14. Manfredo avendo comperate due pezze di tela, una di 120 m. e l'altra di 165,40, ne rivendè m. 230,80. Quanti gliene rimangono?

15. Tre fratelli formarono un capitale pel vecchio genitore: il maggiore pose ll. 1346,60, il secondogenito ll. 1070,80, e il minore ll. 709,25. Quanto mise il 1° più del 2°, quanto il 2° più del 3°, e quanto tutti insieme?

16. Due armate, l'una composta di 24000 uomini e l'altra di 30000, vennero a fierissima zuffa, da cui la prima uscì con solo 14000 combattenti e 2500 feriti, l'altra con 24200 tra combattenti e feriti. Quante furono le vittime di questo flagello?

17. Un calzolaio somministra ad un tornitore un paio di stivali per ll. 18, due paia di scarpe a ll. 6,50 caduno, un paio di stivaletti per ll. 8,40, ed un paio di scarpette a ll. 3,50; riceve in pagamento una dozzina di seggiole per ll. 36, un seggiolone a bracciuoli per ll. 6,40, e 4 sgabelli per ll. 16. Quale dei due è debitore e di quanto?

18. Dopo la vendita di 170 Dl. di grano, un fattore ne registra solo 163; vendutone quindi 277, ne notò soltanto 272; in una terza vendita ne spacciò 300, e non ne registrò che 295; finalmente invece di 489, solo 485. Quanti decalitri dovrà egli restituire al padrone?

19. Un appaltatore vendè 37840 Cg. di fieno; ne spedì già tre carrate, la 1ª di 3647 Cg., la 2ª di 3947 Cg. e la 3ª di 4129 Cg. Quanti Cg. di fieno rimangono?

20. Celso spese ll. 1280,70 in panno, ll. 417,50 in cotone

e ll. 117,10 in lana; rivendè il tutto in quattro volte: nella 1ª vendita ricevette ll. 782,15, nella 2ª ll. 401, nella 3ª ll. 222,20, e nella 4ª ll. 181. Quanto guadagnò o perdè egli?

21. Guido vendè 842 m. di panno per ll. 10567,10, poi 702 m. per ll. 6318, e m. 243 per ll. 1822,50. Se in magazzino ne aveva metri 1961 valutati ll. 19925,60, quanti metri gliene rimangono, e per qual somma?

22. Due soci formano un capitale di ll. 18500; il 1° pone ll. 6590; quanto più di lui mise l'altro?

23. Se io avessi ll. 508,50 di più, potrei pagare un debito di ll. 1015,80 ed avanzare ll. 75; quanto ho io?

24. Aldobrando vendè quattro differenti qualità di lana: 48 Cg. della 1ª per ll. 360; nelle altre vendite la quantità aumentò successivamente di Cg. 20; 28 e 15, mentre i prezzi diminuirono di ll. 47; 19; 22,80. Quanta lana vendè di ciascuna qualità, e per qual valore; quanti Cg. in tutto e per qual somma?

25. Sisto comprò gomma di Batavia e di Para, in tutto 72 Cg.; se della 1ª ne avesse comperati 26 di meno, e della 2ª 26 di più, ne avrebbe 36 Cg. di ciascuna. Quanti ne comprò di ciascuna specie?

26. Trovisi il complemento aritmetico di ciascuno dei seguenti numeri: 247; 401035; 809710; 761400; 301298 e 78901264.

27. Si cerchi il complemento *all'unità* di ciascuna delle seguenti frazioni: 0,05; 0,25; 0,0075; 0,9999; 0,740025; 0,00001.

28. Trovisi il complemento *al cento* di ciascuno dei seguenti numeri: 12; 87; 1,75; 35,25; 10,075; 0,0002495.

29. Si calcoli col mezzo del complemento aritmetico l'espressione: $17 + 3{,}75 - 15{,}05 - 0{,}095 + 0{,}65 - 1{,}25$.

30. Col mezzo del complemento aritmetico si risolva il problema 16°.

31. Si risolva col complemento aritmetico il problema 18°.

§ 3° — MOLTIPLICAZIONE.

92. — La **Moltiplicazione** è un'operazione per cui, dati due numeri, si prende uno di essi tante volte quante unità sono nell'altro.

Così moltiplicare 8 per 6 è prendere 8 sei volte.

93. — Il primo numero, cioè quello che si dee moltiplicare, si chiama **moltiplicando**, il secondo, cioè quello per cui si dee moltiplicare, **moltiplicatore**, ed il risultato dell'operazione **prodotto.**

Il moltiplicando ed il moltiplicatore prendono pure la denominazione di **fattori del prodotto**, concorrendo effettivamente a farlo.

Quando i fattori sono entrambi numeri interi diconsi

anche **sottomultipli** del prodotto, e questo si dice **multiplo** di ciascuno dei fattori.

94. — Secondo la definizione, il mezzo più naturale per ottenere il prodotto di due numeri, p. es. 8 e 6, è di sommare il moltiplicando tante volte quante unità contiene il moltiplicatore; in questo modo:

$8+8=16$; $16+8=24$; $24+8=32$; $32+8=40$; $40+8=48$.

Il numero 48 formandosi col prendere l'8 *sei* volte, esso è il prodotto di 8 per 6. Ciò si indica così: $8 \times 6 = 48$.

Questo modo di procedere riuscirebbe troppo lungo; la moltiplicazione fornisce metodi assai più brevi; essa adunque può dirsi *un'addizione abbreviata*.

95. — Il prodotto è sempre della specie del moltiplicando, perchè questo non è che una parte di quello.

Il moltiplicatore poi vuol essere considerato come un numero astratto, qualunque sia per altro la natura delle sue unità; poichè, nell'operazione, altro non indica se non *quante volte* si prende il moltiplicando.

96. — Risulta dai n^ri 92 e 94 che il prodotto si forma dal moltiplicando, come il moltiplicatore si forma dall'unità, cosicchè se il moltiplicatore consta di *due, tre*, ecc., volte l'unità, il prodotto consterà di *due, tre*, ecc., volte il moltiplicando; e se il moltiplicatore contiene solo *una metà, tre quarti*, ecc., dell'unità, il prodotto conterrà solamente *una metà, tre quarti*, ecc., del moltiplicando. Quindi s'inferisce ancora la seguente definizione:

97. — La **Moltiplicazione** è un'operazione per mezzo della quale, dati due numeri, se ne cerca un terzo che sia relativamente al primo, ciò che il secondo è rispetto all'unità.

98. — Quando i due fattori sono entrambi d'una sola cifra, il prodotto si ottiene col mezzo della tavola seguente, chiamata *pitagoica*.

Tavola di moltiplicazione o pitagorica.

Uso della tavola. — *Per avere il prodotto di due fattori d'una sola cifra, cerchisi uno di essi nella 1ª linea orizzontale superiore, e l'altro nella 1ª colonna verticale a sinistra, seguansi queste linee, e nella casella comune sarà il prodotto.*

Siano i fattori 5 e 7; il loro prodotto 35 è nella casella comune alla linea orizzontale cominciante per 7 ed alla linea verticale cominciante per 5 o viceversa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Osservazione. — Un numero moltiplicato per 0 dà sempre 0 per prodotto; p. es. $4 \times 0 = 0$, $9 \times 0 = 0$.

99. — ***Prodotto di molti fattori.*** Un'espressione di questa forma $4 \times 2 \times 3 \times 5$ indica che bisogna moltiplicare il primo numero pel secondo, quindi il loro prodotto pel terzo, poscia questo nuovo prodotto pel quarto, ecc. Il risultato finale dicesi prodotto *di due*, *di tre*, *di quattro*, ecc., fattori secondo che *due*, *tre*, *quattro*, ecc., numeri sono concorsi a formarlo per via di moltiplicazione. Se i fattori di un prodotto sono tutti uguali ad uno stesso numero, il prodotto dicesi **potenza** di quel numero. Le potenze prendono nome dal numero dei fattori uguali di cui sono il prodotto, dicendosi *seconda*, *terza*, *quarta*... potenza di un numero il prodotto di *due*, *tre*, *quattro*.... fattori uguali a quel numero. La seconda potenza si suol chiamare **quadrato**, e la terza **cubo.** Il grado della potenza si indica coll'**esponente**, che è un numero scritto alla destra d'un altro ed alquanto in alto. Per es.:

$(10)^2$ indica la 2^a potenza di 10, ossia $10 \times 10 = 100$
$(10)^3$ » 3^a » » $10 \times 10 \times 10 = 1000$
$(10)^4$ » 4^a » » $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

100. — *Il prodotto di più fattori non cangia in qualunque ordine si eseguisca la moltiplicazione.*

Ci limitiamo per ora a dimostrare questa verità nel caso di due fattori, rimettendone la dimostrazione generale al n° 167.

Siano i fattori 2 e 3; dico che si ha $3 \times 2 = 2 \times 3$.

In fatti, scomponendo il 2 nelle sue unità semplici, e scrivendole sopra tante linee orizzontali quanti sono le unità del fattore 3, come qui accanto, si vede chiaramente che la somma delle unità del quadro può ottenersi o prendendo una linea orizzontale 3 volte, il che dà tre volte due unità, ossia 3×2; o prendendo una linea verticale due volte, il che dà due volte tre unità, ossia 2×3. I due prodotti 3×2 e 2×3 sono dunque entrambi uguali alla somma delle unità del quadro; essi dunque (54 — 5°) sono uguali fra loro.

1	1
1	1
1	1

101. — La moltiplicazione può presentare tre casi principali:

1° Moltiplicazione d'un numero di più cifre per uno d'una sola.

2° Moltiplicazione di due numeri di più cifre.

3° Moltiplicazione di numeri decimali.

La moltiplicazione di due numeri d'una sola cifra indicata al n° 98, si eseguisce facilmente col mezzo della Tavola pitagorica.

102. — I° ***Caso.*** **Moltiplicazione d'un numero di più cifre per uno d'una sola.**

Questo caso della moltiplicazione si fonda sul seguente principio:

Il prodotto d'una somma per un numero si ottiene moltiplicando ciascuna parte della somma per questo numero, e sommando quindi i prodotti parziali.

Sia la somma $6 + 8 + 9$ da moltiplicarsi per 3; dico che si avrà

$$(6 + 8 + 9) \times 3 = 6 \times 3 + 8 \times 3 + 9 \times 3.$$

In fatti, dalla definizione (92) si ha

$$\begin{aligned}(6 + 8 + 9) \times 3 &= (6 + 8 + 9) + (6 + 8 + 9) + (6 + 8 + 9)\\ &= 6 + 8 + 9 + 6 + 8 + 9 + 6 + 8 + 9\\ &= (6 + 6 + 6) + (8 + 8 + 8) + (9 + 9 + 9)\\ &= 6 \times 3 + 8 \times 3 + 9 \times 3.\end{aligned}$$

103. — Ciò posto abbiasi da moltiplicare 765 per 4.

Il numero 765 essendo la somma delle unità dei diversi ordini (61), si otterrà il prodotto richiesto moltiplicando successivamente le sue unità, decine e centinaia, e sommando i prodotti parziali, come indica il quadro (*a*).

(*a*)

$5 \times 4 = 20$ *unità* = ...	20
$6 \times 4 = 24$ *decine* = ...	240
$7 \times 4 = 28$ *centin.* = ...	2800
Prodotto	3060

(*b*)

$$\begin{array}{r} 765 \\ \times\ 4 \\ \hline 3060 \end{array}$$

In pratica si opera come segue:

Posto il moltiplicatore sotto al moltiplicando, come nel quadro (*b*); cominciando dalla destra, dico: 4 volte 5 unità fanno 20 unità, pongo 0 unità e ritengo 2 decine per unirle al prodotto delle decine per 4: 4 volte 6 decine danno 24 e 2 di ritenuta fanno 26 decine, scrivo le 6 decine e ritengo 2 centinaia; 4 volte 7 centinaia fanno 28 e 2 di ritenuta danno 30, pongo 0 centinaia e mi avanzano 3 migliaia, che scrivo a sinistra delle centinaia; ottengo così il numero 3060, che è il prodotto richiesto, perchè esso consta della somma dei prodotti delle parti del moltiplicando pel moltiplicatore.

Nello stesso modo si otterrà $57006 \times 5 = 285030$.

104. — II° ***Caso***. **Moltiplicazione di due numeri di più cifre.**

Il secondo caso della moltiplicazione poggia sopra i due principii seguenti:

1° Il prodotto d'un numero per una somma si ottiene moltiplicando questo numero successivamente per ciascuna parte della somma, e riunendo quindi i prodotti parziali.

Sia il numero 3 da moltiplicarsi per la somma $6 + 8 + 9$; dico che si avrà

$$3 \times (6 + 8 + 9) = 3 \times 6 + 3 \times 8 + 3 \times 9.$$

Infatti, poichè il prodotto non si altera invertendo l'ordine dei fattori, si ha

$$3 \times (6+8+9) = (6+8+9) \times 3.$$

Ma (102) $(6+8+9) \times 3 = 6 \times 3 + 8 \times 3 + 9 \times 3$:

quindi invertendo i fattori nei prodotti parziali,

$$(6+8+9) \times 3 = 3 \times 6 + 3 \times 8 + 3 \times 9\ ;$$

dunque $3 \times (6+8+9) = 3 \times 6 + 3 \times 8 + 3 \times 9$.

2° Moltiplicare un numero per un altro torna lo stesso che moltiplicarlo successivamente per i fattori di quest'altro.

Sia il numero 14 da moltiplicarsi per 6; dico che si avrà

$$14 \times 6 = 14 \times 3 \times 2.$$

In fatti si ha (92)

$$14 \times 6 = (14+14+14) + (14+14+14) = (14+14+14) \times 2.$$

Ma poichè $14+14+14 = 14 \times 3$, si può alla prima di queste quantità sostituire la seconda; il che dà

$$14 \times 6 = 14 \times 3 \times 2.$$

Conseguenza. — Quando il moltiplicatore contiene una sola cifra significativa seguita da zeri, si può fare il prodotto del moltiplicando per questa cifra ed aggiungervi gli zeri che la seguono.

Per es. il prodotto di 524 per 300 si otterrà moltiplicando 524 per 3 ed aggiungendo al risultato due zeri.

In fatti $524 \times 300 = 524 \times 3 \times 100 = 1572 \times 100$; e quindi (32), $1572 \times 100 = 157200$.

105. — Ciò posto, abbiasi da moltiplicare 946, per 873.

Per ottenere il richiesto prodotto, basterà (princip. 1°) moltiplicare 946 successivamente per 3, per 70 e per 800, che sono le parti del moltiplicatore, e riunire i risultati; ora moltiplicare per 70 torna lo stesso (*conseguenza*) che moltiplicare per 7 ed aggiungere uno zero al prodotto, come pure si moltiplica per 800 coll'aggiungere due zeri al prodotto per 8. Si avrà dunque il quadro (*c*).

(*c*)

946 × 3 = 2838.....*Prod.* di 946 *per* 3 *unità*
946 × 70 = 66220.... » » 70 »...
946 × 800 = 756800.... » » 800 »...

825858....*Prodotto totale*.....

(*d*)

946	
873	
2838	
6622	
7568	
825858	

In pratica si opera come segue:

Disposto il moltiplicatore sotto il moltiplicando, come vedesi nel quadro (*d*), si fa il prodotto di 946 per le 3 unità del moltiplicatore, come nel 1° caso; si moltiplica nello stesso modo 946

per la cifra 7 delle decine del moltiplicatore, e scrivesi il prodotto sotto il primo, ponendo la prima cifra a destra sotto le decine di quello. Da ultimo si moltiplica 916 per la cifra 8 delle centinaia del moltiplicatore, ed il prodotto si scrive sotto il secondo, ponendo la prima cifra a destra sotto le centinaia del primo prodotto parziale. Si continuerebbe nello stesso modo se vi fossero altre cifre nel moltiplicatore. Sommando quindi i prodotti parziali si ottiene 825858, la qual somma è il prodotto richiesto, perchè essa consta della riunione dei prodotti del moltiplicando per le parti del moltiplicatore.

106. — III° ***Caso***. **Moltiplicazione di numeri decimali.**

La moltiplicazione dei numeri decimali si fonda su questo principio:

Se uno dei fattori d'un prodotto si moltiplica per un numero, il prodotto viene moltiplicato per lo stesso numero.

Siano i fattori 14 e 5, il cui prodotto è 70; dico che moltiplicandosi il fattore 5, per es., per 3, il prodotto 70 sarà pure moltiplicato per 3, si avrà cioè:

$$14 \times (5 \times 3) = 70 \times 3.$$

Di fatti, poichè il moltiplicatore 5 contiene cinque unità, il prodotto 14×5 è (92) la somma di cinque parti uguali al moltiplicando, ossia ha luogo l'uguaglianza

$$14 \times 5 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 70.$$

Ma dopo aver moltiplicato 5 per 3, il nuovo moltiplicatore (5×3) contenendo tre volte tante unità, il nuovo prodotto $14 \times (5 \times 3)$ si comporrà di tre volte tante parti uguali a quelle del primo: si avrà cioè:

$$14 \times (5 \times 3) = (14 + 14 + 14 + 14 + 14) + (14 + 14 + 14 + 14 + 14) + (14 + 14 + 14 + 14 + 14);$$

ossia $14 \times (5 \times 3) = (14 + 14 + 14 + 14 + 14) \times 3 = 70 \times 3.$

Conseguenza. — *Se ciascuno dei fattori d'un prodotto si moltiplica per un numero, il prodotto vien moltiplicato per gli stessi numeri, e quindi* (104 — 2°) *esso risulta moltiplicato pel prodotto dei medesimi.*

Per es. siano i fattori 4 e 25, il cui prodotto è 100; se si moltiplica uno di essi per 2, l'altro per 3, il prodotto 100 sarà moltiplicato per 2×3, cioè per 6.

107. — Ciò posto, abbiasi da moltiplicare 4,205 per 0,34.

Si sopprimono (mentalmente) le virgole dei fattori, e si eseguisce l'operazione come nel 2° caso; il che dà per prodotto 142970.

Ma si osservi ora che la soppressione delle virgole nei fattori moltiplicò (42) il primo per 1000 ed il se-

```
 4,205
 0,34
------
16820
12615
------
1,42970
```

condo per 100 ; il prodotto venne pertanto (*conseguenza*) moltiplicato per 1000 × 100 cioè per 100000. Dunque il numero 142970 è 100000 volte maggiore del vero; affinchè abbia il valore che gli compete, bisogna renderlo 100000 volte più piccolo, il che si fa (43) col separare cinque cifre a destra di esso. Ciò fatto, risulta 1,42970 per il richiesto prodotto.

S'inferisce da ciò che :

La moltiplicazione dei numeri decimali si eseguisce come quella dei numeri interi, avvertendo solo di separare colla virgola a destra del prodotto tante cifre quante decimali contengono i due fattori.

Gli esempi seguenti aggiungeranno chiarezza al sin qui detto.

1° *Esempio*

Moltiplicando	0,0032
Moltiplicatore	0,08
Prodotto	0,000256

2° *Esempio*

Moltiplicando	0,354
Moltiplicatore	0,0072
	708
	2478
Prodotto	0,0025488

108. — ***Regola.*** *Per moltiplicare un numero per un altro, si scrive il moltiplicatore sotto il moltiplicando, e si tira una linea orizzontale; si moltiplica successivamente tutto il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, cominciando dalla destra, e si scrivono i prodotti parziali in modo che la prima cifra a destra di ciascuno di essi si trovi collocata sotto le unità dell'ordine cui appartiene la cifra del moltiplicatore che dà tal prodotto: la somma dei prodotti parziali darà il prodotto cercato.*

Se il moltiplicando ed il moltiplicatore contengono cifre decimali si fa la moltiplicazione come si operasse sopra numeri interi, e poi si separano a destra del prodotto tante cifre quante decimali si trovano ne' due fattori.

109. — ***Osservazioni.*** 1ª Il 1° caso della moltiplicazione racchiude implicitamente i due altri: anzi possiam dire che una moltiplicazione, per complicata che sia, si riduce sempre a moltiplicare un numero d'una sola cifra per un altro pure di una sola.

2ª Per formare i diversi prodotti parziali si comincia la moltiplicazione dalla destra, per le stesse ragioni addotte nell'addizione, giacchè la moltiplicazione altro non è che un'addizione abbreviata.

110. — ***Come in alcuni casi si abbrevia la Moltiplicazione.*** 1° Se trovansi zeri fra le cifre del moltiplicatore, si può senza operare sui medesimi passare alla prima cifra significativa che li precede, purchè si metta la prima cifra del prodotto parziale sotto quella con cui si moltiplica.

È chiaro, di fatti, dall'esempio seguente, che si ottiene lo stesso risultato.

sia *operando sugli zeri:*

27436
× 36002
54872
00000 .
00000 ..
164616 ...
82308. ....
987750872

sia *non operando sugli zeri:*

27436
× 36002
54872
164616 ...
82308 ....
987750872

2° Per moltiplicare un numero per 10, 100, 1000,....., se è intero, si scrivono alla sua destra 1, 2, 3.... zeri (32); se poi è decimale, si trasporta la virgola di 1, 2, 3,..... ordini verso destra (42).

3° Poichè il prodotto è indipendente dall'ordine de' fattori si prenderà per moltiplicatore quello dei due che contiene meno cifre significative, o che ha in parecchi ordini la medesima cifra. Per es. il prodotto di 1004004 per 6798142 si otterrà facendo una sola moltiplicazione per 4, ove si ponga a moltiplicatore il primo fattore.

4° Quando uno dei fattori, od entrambi, finiscono con zeri, si moltiplicheranno fra loro come se non avessero tali zeri, avvertendo poi di aggiungerli al prodotto.

In fatti, si ha (104 — 2°) che

$$236 \times 5400 = 236 \times 54 \times 100 = 12744 \times 100 = 1274400.$$

Si ha parimente $1200 \times 150 = 12 \times 100 \times 15 \times 10$
$= 12 \times 15 \times 100 \times 10$
$= 180 \times 1000 = 180000.$

5° Giova talora risolvere uno dei numeri dati ne' suoi fattori (104 — 2°). Volendosi, per esempio, il prodotto di 25 per 36, si scomporrà il 36 in 4×9, poi si farà prima $25 \times 4 = 100$, quindi $100 \times 9 = 900$.

111. — ***Prova della Moltiplicazione.*** La maniera più semplice per far la prova della moltiplicazione è di fare un'altra moltiplicazione, ma invertendo i fattori: il nuovo prodotto deve essere uguale al primo.

Operaz.	*Prova.*
235	726
726	235
1410	3630
470	2178
1645	1452
170610	170610

Problemi sulla Moltiplicazione.

32. Andreolo guadagna ll. 3,35 il dì; quanto guadagnerà in 5 settimane di 6 giorni di lavoro ciascuna?

33. Tiburzio guadagna ll. 32,75 la settimana; spreca uno

scudo ogni domenica e festa; quanto avrebb'egli nella cassa di risparmio in fin dell'anno senza computare gl'interessi, se avesse posto in essa questo scudo, considerando l'anno di 52 domeniche e 24 feste?

34. Niceforo guadagna ll. 3,60 il dì, e spende ll. 1,75; dicasi il risparmio di un mese, sapendo che lavorò solo 26 giorni

35. Un droghiere comprò 1500 Cg. di zucchero di barbabietola a ll. 0,60 il Cg.; 200 Cg. di caffè a ll. 3,80 e 35 Cg. di pepe a ll. 7 il Cg.: quanto ha speso?

36. In un laboratorio sono 56 lavoranti, 14 dei quali guadagnano caduno ll. 5,60 il dì, e gli altri ll. 2,50. Dicasi quanto riceva ciascuno, e quanto tutti insieme in una settimana.

37. Marco lavorante di tarsia, conviene coll'intarsiatore mastro a ll. 3,50 al giorno, colla condizione che, ove non venisse a bottega perderebbe la paga sua del dì e pagherebbe ll. 1,25. Computate quant'egli abbia perduto in un anno per non esser comparso in bottega 50 lunedì, oltre 9 giorni di altre assenze.

38. Un mugnaio comprò 58 sacchi di grano a ll. 28,70 l'uno, 39 a ll. 31,25, 27 a ll. 34, e 62 a ll. 29,50; quanto deve egli rivendere il tutto per guadagnare ll. 3,40 per sacco, ove la spesa di trasporto ascenda a ll. 0,95 il sacco?

39. Si comperarono 36 m. di stoffa a ll. 12,50 il m., e furono venduti: m. 8 ll. 12,80, m. 7 a ll. 13,25, m. 9 a ll. 13, 90, m. 5 a ll. 14,15 e il resto a ll. 14,45. Qual fu il guadagno?

40. Un Cg. di zucchero di prima qualità costa quanto Cg. 1,18 di seconda. Quanti Cg. di questa si avranno col valore di Cg. 875 della prima?

41. Si spese una certa somma nel comperare m. 182 di stoffa; quanti metri d'un'altra stoffa si comprerebbero colla medesima somma, posto che un metro della prima valga m. 0,85 della seconda?

42. Un conciatore comprò 75 pelli di montone a ll. 1, 20 l'una, spese per conciarle ll. 55,25 % del prezzo di compera, e le rivendè ll. 1,95 l'una; quanto guadagnò?

43. Due convogli partono nella stessa direzione percorrendo il primo 36 Cm. all'ora, l'altro 30. Chiedesi a qual distanza si troverà il 1° dal 2° dopo 6 ore di corsa, se quest' ultimo partì due ore dopo.

44. Un tornitore comprò avorio a ll. 7,75 il Cg.; se ne avesse preso Cg. 3,15 di più, la sua compra sarebbe aumentata di un ottavo. Quanto spese?

45. Luciano farebbe un lavoro in 8 giorni, se gli si dessero 4 ll. il dì; ma dandogli ll. 6,50 ei promette di farlo in 5. Siccome ogni giorno di ritardo reca al committente un danno di ll. 5,50 dicasi qual partito gli convenga scegliere.

§ 4° — DIVISIONE.

112. — La **Divisione** è un'operazione per cui, dati due numeri, si cerca quante volte uno di essi è contenuto nell'altro.

Così dividere 48 per 8 è cercare quante volte 8 è contenuto in 48.

113. — Il numero che si divide chiamasi **dividendo**, quello per cui si divide, **divisore**, ed il risultato dell'operazione **quoto** o **quoziente**.

Il dividendo e il divisore prendono pure la denominazione di **termini della divisione.**

114. — Secondo la definizione, il mezzo più naturale per ottenere il quoto d'un numero per un altro, per esempio di 48 per 8, è di sottrarre successivamente questo da quello quante volte si può: questo *numero di volte* sarà il quoto.

$$48-8=40;\ 40-8=32;\ 32-8=24;\ 24-8=16$$
$$16-8=8;\ 8-8=0.$$

Il numero 8 potendosi togliere 6 volte da 48, esso vi è contenuto 6 volte. Dunque il quoto di 48 per 8 è 6.

Ciò si indica così $\frac{48}{8}=6$, ovv. $48:8=6$.

Questo modo di procedere riuscirebbe troppo lungo; la divisione fornisce metodi assai più brevi; essa dunque può dirsi *una sottrazione abbreviata.*

115. — Da quanto precede si scorge che nel fare la divisione il dividendo si scompone in tante parti uguali al divisore quante unità sono nel quoto. Da ciò segue che il dividendo si può ricomporre col prendere tante volte il divisore quante unità contiene il quoto. Dunque (92): *Il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto.*

116. — Quindi s'inferisce ancora che:

La **Divisione** è un'operazione per cui, dato un prodotto di due fattori ed uno di essi, si trova l'altro fattore.

117. — Il prodotto di due numeri essendo sempre della natura di uno dei fattori (95), e nella divisione il dividendo essendo un prodotto, il divisore ed il quoto i suoi fattori si deduce che:

Se il dividendo e il divisore sono di natura diversa, il quoto è della natura del dividendo. Ma se quelli sono della stessa natura, il quoto è di natura diversa od anche un numero astratto.

118. — ***Quoto intero e quoto frazionario.*** Nel dividere 48 per 8 si ebbe a quoto un numero *intero* 6, perchè 8 è contenuto esattamente 6 volte in 48. Ma non sempre avviene così.

Vogliasi dividere 7 per 2; dopo aver tolto 3 volte il 2 dal 7 rimane 1, da cui il divisore più non si può sottrarre. Questo numero che rimane dicesi *resto* o *residuo della divisione*. Quantunque il divisore siasi potuto levare tre volte dal dividendo pure il numero 3 non è il vero quoto; giacchè moltiplicandolo pel divisore si ottiene 6, e non 7. Ciò proviene dal resto 1, che non venne diviso.

In fatti, $7 = 6 + 1$; ora nel dividere si formarono 3 parti uguali a 2, e si è dunque diviso (115) il numero 6, ma l'1 rimase indiviso. Per compire il quoto converrebbe pertanto dividere ancora 1 per 2, ed aggiungere il risultato al numero 3 già ottenuto. Ma questa divisione non si potendo effettuare la si indica nel modo solito, ponendo cioè il dividendo sopra ed il divisore sotto, così $\frac{1}{2}$. Questa espressione rappresentando una parte dell'unità, è una *frazione* (5); ed il quoto, che è $3 + \frac{1}{2}$ dicesi *quoto frazionario*.

119. — Allorchè il quoto è frazionario, il prodotto del divisore per la parte intiera del quoto uguaglia il dividendo *meno* il resto: e questo prodotto è il *massimo multiplo* (93) del divisore contenuto nel dividendo.

Così, nell'esempio precedente, il divisore 2 moltiplicato per 3 uguaglia 6, cioè $7 - 1$; ed il prodotto è il massimo multiplo di 2 che sia contenuto in 7.

120. — Un numero dicesi **divisibile** per un altro quando il quoto della loro divisione è intero.

121. — Si può determinare *a priori* il numero delle cifre d'un quoto. Accenneremo qui il mezzo più semplice, rimandando, per dimostrazione più scientifica, al n° 186.

Il numero delle cifre d'un quoto è uguale al più piccol numero di zeri che bisogna scrivere a destra del divisore affinchè esso contenga il dividendo.

In fatti, abbiasi da dividere 912724 per 235.

Il quoto moltiplicato pel divisore deve riprodurre il dividendo (115).

Ora, $235 \times 10 = 2350$, numero che non contiene il dividendo
$235 \times 100 = 23500$ » »
$235 \times 1000 = 235000$ » »
$235 \times 10000 = 2350000$, numero che contiene »

Il quoto è dunque compreso fra 1000 e 10000, e consta per conseguenza di quattro cifre; tante appunto quanti zeri convenne scrivere a destra del divisore perchè contenesse il dividendo.

122. — I prodotti di due fattori d'una sola cifra essendo tutti compresi nella tavola pitagorica (98), si può con essa ottenere immediatamente il risultato della divisione nei casi in cui il divisore ed il quoto hanno una sola cifra.

Vogliasi, a mo' d'esempio, dividere 35 per 7; a prima giunta si scorge che il quoto è 5, perchè 7 moltiplicato per 5 dà 35. Abbiasi invece 45 da dividere per 7; il 45 non trovasi fra i multipli di 7, ma è compreso tra i due multipli 42 e 49; perciò 42 è il maggior multiplo di 7 compreso nel dividendo 45, e siccome 42 è uguale a 7×6, così 6 è la parte intera del quoto. Dunque 45 diviso per 7 dà sei per quoto e 3 di residuo.

Osservazione. — Un numero diviso per se stesso dà per quoto 1, e zero diviso per qualunque numero dà *zero* per quoto (98, *osservazione*).

123. — La divisione può presentare tre casi principali:

1° Divisione d'un numero di più cifre per uno di una sola, quando il quoziente aver deve più cifre.

2° Divisione di due numeri di più cifre.

3° Divisione di numeri decimali.

124. — I° ***Caso.*** **Divisione d'un numero di più cifre per uno d'una sola, quando il quoziente aver deve più cifre.**

Abbiasi da dividere 45381 per 7.

Il quoto avrà quattro cifre (121); e siccome il dividendo è il prodotto del quoto pel divisore (115), esso consta dalla somma di quattro prodotti parziali (102, 103), cioè il prodotto delle migliaia del quoto pel divisore, il prodotto delle centinaia del quoto pel divisore, ecc. Per rendere meno astratto il ragionamento, rappresentiamo le cifre del quoto con lettere. Sia dunque a la cifra delle migliaia, b quella delle centinaia, c quella delle decine, e d quella delle unità; i prodotti $a \times 7$, $b \times 7$, $c \times 7$ e $d \times 7$ saranno le parti costituenti il dividendo; cosicchè si avrà

$$45381 = a \times 7 + b \times 7 + c \times 7 + d \times 7.$$

Se ragionando sopra quest'uguaglianza, perveniamo a determinare le cifre rappresentate dalle lettere, non rimarrà più che da collocare al rispettivo ordine, ed il quoto sarà formato.

Ora, poichè a rappresenta migliaia, il prodotto $a \times 7$ è un certo numero di migliaia; e trovandosi esso nel dividendo, dev'essere necessariamente nelle 45 migliaia del medesimo. *Separiamole con un punto.* Il numero 45 è pertanto un prodotto, i cui fattori sono, uno il divisore 7, l'altro a, cioè la cifra incognita delle migliaia del quoto. Questa cifra si troverà dunque (116) col *dividere* 45

45.381	7	
42 000	6483	
33.81		
28 00		
58.1		$a=6$
56 0		$b=4$
21		$c=8$
21		$d=3$
00		

per 7 (*). Ora, 45 diviso per 7 dà 6 per *quoto* e 3 *di resto*; dunque $a = 6$ migliaia.

Moltiplicando queste 6 *migliaia pel divisore*, avremo il prodotto $a \times 7$, cioè $6000 \times 7 = 42000$. *Sottraiamolo dal dividendo.* Il residuo 3381 non contiene più che i tre altri prodotti. Si ha dunque

$$3381 = b \times 7 + c \times 7 + d \times 7.$$

Da questo residuo dedurremo il valore di b coi medesimi ragionamenti fatti per determinare quello di a.

Poichè b rappresenta centinaia, il prodotto $b \times 7$ è un certo numero di centinaia; e trovandosi esso nel residuo 3381, deve essere necessariamente nelle 33 centinaia del medesimo. *Separiamole con un punto.* Il numero 33 è pertanto un prodotto, i cui fattori sono, uno il divisore 7, l'altro b, cioè la cifra incognita delle centinaia del quoto. Questa cifra si troverà dunque (116) col *dividere* 33 *per* 7. Ora 33 diviso per 7 dà 4 per quoto con 5 di resto; dunque $b = 4$ centinaia.

Moltiplicando queste 4 *centinaia pel divisore*, avremo il prodotto $b \times 7$, cioè $400 \times 7 = 2800$. *Sottraiamolo dal nuovo dividendo.* Il residuo 581 non contiene più che i due ultimi prodotti parziali. Si ha dunque

$$581 = c \times 7 + d \times 7.$$

Trattando quest'altro residuo come il precedente si trova $c = 8$ decine; perciò $c \times 7 = 80 \times 7 = 560$, che sottratto da 581 dà 21. Si ha dunque

$$21 = d \times 7.$$

Finalmente, essendo 21 il prodotto del divisore 7 per la cifra delle unità del quoto, questa si otterrà col dividere 21 per 7, il che dà 3; dunque $d = 3$ unità. Moltiplicando parimente queste 3 unità pel divisore, si ottiene appunto 21, che sottratto da 21 dà zero per ultimo residuo. Le quattro cifre ottenute, collocate al rispettivo ordine, formano il numero 6483.

125. — Che questo numero sia il quoto richiesto, apparirà evidente, ove si rifletta che, avendo nel corso dell'operazione sottratto dal divivendo successivamente tutte le parti costituenti il prodotto di 6483 pel divisore, il prodotto stesso venne sottratto; e, giacchè il residuo fu nullo, il prodotto di 6483 pel divisore è

(*) Vero è che 45 è maggiore del prodotto delle migliaia del quoto pel divisore, perchè la somma degli altri prodotti parziali $b \times 7$, $c \times 7$, $d \times 7$ ha dato alcune migliaia, le quali necessariamente si trovano nel 45. Ma il numero di queste migliaia è minore di 7; giacchè il numero formato dalle centinaia, decine, ed unità del quoto essendo minore di 1000, moltiplicato per 7 dà un prodotto minore di 7000. Risulta da ciò, che nel dividere 45 per 7, le migliaia provenienti dagli ordini inferiori non possono dare al quoto un'unità di più, ma debbono rimanere per resto. Dunque *la cifra che si ottiene dividendo* 45 *per* 7 *non può essere troppo grande.* Ciò s'intenda ripetuto in ciascuna divisione parziale in cui il dividendo non è un multiplo del divisore.

uguale al dividendo; dunque il numero 6483 è il quoto di 45381 per 7.

126. — La dimostrazione precedente (124) si estende pure al caso in cui la divisione conducesse ad un resto: poichè il resto rimanendo indiviso (118, 119), i ragionamenti non volgono propriamente sul dividendo, sibbene sul massimo multiplo del divisore in esso contenuto.

127. — Si scorge dal quadro dell'operazione, che il dividendo parziale 33 poteva ottenersi sottraendo semplicemente il prodotto 42 dal primo dividendo parziale 45, ed abbassando a destra del residuo 3 la seguente cifra 3 del dividendo totale. Così pure si potevano ottenere gli altri dividendi parziali 58 e 21, sottraendo sempre il prodotto dal dividendo parziale precedente, ed abbassando la seguente cifra del dividendo totale.

Così appunto si fa in pratica, cioè:

Scritto il divisore alla destra del dividendo, e separatolo con un tratto verticale, tiro una linea orizzontale sotto il divisore per separarlo dal quoto, prendo sulla sinistra del dividendo tante cifre, quante son necessarie a contenere il divisore. Qui sono necessarie due, cioè 45 migliaia.

45381	7
42	6483
033	
28	
058	
56	
021	
21	
00	

Dividendo 45 mila per 7 trovo 6, che pongo al quoziente; 6 volte 7 fanno 42, che levate da 45 rimangono 3: abbasso la cifra a destra del 5 a lato del residuo, ed ho 33 per nuovo dividendo. Queste due cifre rappresentano centinaia, le quali divise per 7, danno 4 centinaia per quoto. Moltiplicando 7 per 4 e levando il prodotto 28 da 33, ho per secondo residuo 5. Operando sopra questo secondo residuo, come sul primo, trovo 8 per la cifra delle decine, il cui prodotto pel divisore, levato da 58, mi dà per terzo residuo 2. Abbassando finalmente l'ultima cifra, ho 21 unità, che divise per 7 danno 3 unità. Moltiplicando 7 per 3 e levando il prodotto del 3° residuo, ottengo zero per ultimo risultato; onde conchiudesi che il quoto di 45381 per 7 uguaglia 6483.

Osservazione. — Questo caso essendo molto semplice si suol abbreviare l'operazione; a tal uopo, scritto solo il dividendo, si fanno a memoria le sottrazioni, unendo col pensiero i resti alla cifra seguente, ed il quoto si mette sotto.

Abbiasi da dividere 53109 per 7. *Dividendo* 53109

Si dirà: 7 in 53 sta 7 volte e resta 4, che unito all'1 seguente fa 41; 7 nel 41 sta cinque volte e resta 6; il 7 in 60 sta 8 volte e resta 4; il 7 in 49 sta 7 volte. *Quoto*.... 7587

128. — II° ***Caso.*** **Divisione di due numeri di più cifre.**

Il quoto può avere una o più cifre.

1° Sia il numero 1782 da dividersi per 297.

Ben si vede che 1782 contiene 297 meno di 10 volte; laonde il quoto avrà una sola cifra. Ma qual sia questa cifra non si scorge immediatamente, essendo il dividendo fuori de' limiti della tavola pitagorica. Per determinarla si può ragionare così:

Il dividendo essendo il prodotto del divisore per un numero d'una sola cifra, esso consta della somma di tre prodotti parziali: uno di centinaia, l'altro di decine, ed il terzo di unità, provenienti rispettivamente dalle due centinaia, dalle 9 decine e dalle 7 unità del divisore moltiplicate per la cifra del quoto. Il dividendo può pertanto scomporsi in centinaia, decine ed unità, per modo che divise rispettivamente per le centinaia, decine ed unità del divisore, diano la medesima cifra; questa sarà il quoto richiesto.

Dividiamo adunque le 17 centinaia del dividendo per le 2 del divisore; si ottiene 8 con 1 di resto, che unito alle 8 decine fa 18. Ora, queste 18 decine divise per le 9 del divisore danno una cifra minore di 8; l'8 è dunque troppo grande. Se si prova il 7, le 19 centinaia danno 3 di resto, onde si hanno 38 decine; or queste divise per quelle del divisore danno una cifra inferiore a 7; perciò il 7 è ancora troppo grande. Si provi il 6: le 19 centinaia danno in tal caso 5 di resto, onde risultano 58 decine; queste decine divise con quelle del divisore danno pure 6 con quattro di resto: questo unito alle 2 unità fa 42 unità, le quali divise per le unità del divisore danno altresì 6. Il 6 è dunque la cifra richiesta. Da quanto precede si può conchiudere che:

Per ottenere un quoto d'una sola cifra, proveniente dalla divisione di due numeri di più cifre, si fa a memoria una divisione del 1° caso il cui dividendo sia il dividendo proposto, e il divisore sia, — per la prima divisione parziale, la prima cifra a sinistra del divisore, — per la seconda divisione parziale, la seconda cifra a sinistra del divisore, — ecc.

La cifra data dalla prima divisione parziale non può essere troppo piccola; ma essa è troppo grande, se le divisioni successive ne danno una minore. In tal caso si diminuisce la prima cifra ottenuta successivamente d'un'unità, finchè si pervenga ad una cifra che possa venire data da tutte le divisioni parziali: questa sarà il quoto richiesto.

2° Proponiamoci ora il dividere 397194 per 686.

Il quoto avrà tre cifre (121), e siccome il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto (115), esso consta della somma di tre prodotti parziali (104, 105), cioè: il prodotto del divisore per le centinaia del quoto, il prodotto del divisore per le decine del quoto, ed il prodotto del divisore per le unità del quoto. Ora, rappresentando come nel 1° caso le cifre del quoto rispettivamente colle lettere a, b, c, i prodotti $686 \times a$, $686 \times b$, $686 \times c$, saranno le parti costituenti il dividendo; cosicchè si avrà

$$397194 = 686 \times a + 686 \times b + 686 \times c.$$

Poichè a rappresenta centinaia, il prodotto $686 \times a$ è un certo numero di centinaia, il quale deve necessariamente trovarsi nelle 3971 centinaia del dividendo. *Separiamole con un punto.* Il numero 3971 è pertanto un prodotto (*), i cui fattori sono, uno il divisore 686, l'altro a, cioè la cifra incognita delle centinaia del quoto. Questa cifra si troverà dunque (116) col dividere 3971 per 686.

3971.94	686
3430.00	579
5419.4	
48020	$a=5$
6174	$b=7$
6174	$c=9$
0000	

Ora, 3971 diviso per 686 dà 5 (1°), dunque $a=5$ centinaia. *Moltiplicando il divisore per queste cinque centinaia,* avremo il prodotto $686 \times a$, cioè $686 \times 500 = 343000$. *Sottraiamolo dal dividendo.* Il residuo 54194 non contiene più che i due ultimi prodotti. Si ha dunque

$$54194 = 686 \times b + 686 \times c.$$

Questo ragionamento essendo identico a quello del 1° caso, non proseguiamo oltre. Si otterrebbe ancora $b=7$ e $c=9$; onde il quoto è 579.

129. — Si scorge dal quadro dell'operazione che i dividendi parziali 5419 e 6174 potevano formarsi come si disse già (127), sottraendo il prodotto dal dividendo parziale precedente, ed abbassando la seguente cifra del dividendo totale.

Così appunto si fa in pratica cioè:

Dopo preso sulla destra del dividendo tante cifre quante fanno d'uopo, affinchè il divisore vi sia contenuto, dico: il 5 in 39 sta 5 volte; pongo 5 al quoto e moltiplico 5 per 686; il prodotto 3430 essendo sottratto da 3971 ottengo per residuo 541, alla cui destra abbasso il 9 del dividendo, il che mi dà 5419 per nuovo dividendo parziale che divido per 686.

3971.94	686
3430	579
5419	
4802	
6174	
6174	
0000	

Similmente dico: il 6 in 54 sta 7 volte; pongo queste 7 decine alla destra delle centinaia del quoto; 7 volte 686 danno 4802, che levato da 5419, rimane 617. Finalmente alla destra di questo nuovo residuo abbasso il 4, ed ho 6174 per 3° dividendo parziale che divido ancora per 686, e da cui ottengo 9 per la cifra delle unità; la pongo accanto alle decine del quoto, e quindi la moltiplico per 686, il cui prodotto sottratto da 6174, mi dà 0 per residuo.

130. — Invece di porre sotto ciascun dividendo parziale il prodotto del divisore per la cifra corrispondente del quoto, si può operare la sottrazione di mano in mano che si fa la moltiplicazione, facendo uso del *metodo senza prestito* (76, *osservaz.*), come

(*) S'intenda qui fatta sul numero 3971 la medesima osservazione fatta già sul 45 nella nota al primo caso.

si vede in questo esempio. Dopo aver preso 6 cifre a sinistra del dividendo, dico: il 9 in 81 sta 8 volte; invece di fare il prodotto di 95467 per 8, dico: 7 volte 8 fanno 56; levare 56 da 7 non si può, ma aumentando col pensiero 7 di 50 unità ho 57; 56 levate da 57 resta 1; 6 volte 8 fanno 48, e 5 fanno 53; levare 53 da 9 non si può, ma aumentando 9 di 50 unità ho 59; 53 levate da 59 restano 6; 4 volte 8 fanno 32, e 5 fanno 37; levare 37 da 1 non si può, l'aumento di 40 unità, il che da 41; 37 levate da 41 restano 4; 5 volte 8 fanno 40, e 4 fanno 44; levare 44 da 7 non si può, aumento 7 di 40 unità, il che mi dà 47; 44 levate da 47 restano 3. Finalmente 9 volte 8 fanno 72, e 4 fanno 76, che levate da 81 restano 5. Si opera nello stesso modo sulle altre cifre del quoto, ed in pratica come segue: il 9 in 53 sta 5 volte; 5 volte 7 fanno 35, che levate da 35 danno per residuo 0 e ritengo 3; 5 volte 6 fanno 30 e 3 di ritenuta 33, che levate da 41 restano 8, e ritengo 4; 5 volte 4 fanno 20 e 4 di ritenuta fanno 24, levate da 26 restano 2, e ritengo 2, ecc.

81719752	95467
534615	856
572802	
00000	

131. — ***Avvertenze.*** Dal sin qui esposto sulla divisione risultano alcune conseguenze, che giova non mai dimenticare se vuolsi eseguire a dovere l'operazione.

1ª Il resto è, per natura (118), minore del divisore. Quando adunque si ottiene un resto uguale o maggiore del divisore, ciò indica che la cifra posta al quoto è troppo piccola.

2ª Ogni prodotto parziale deve potersi sottrarre dal corrispondente dividendo parziale. Ove ciò non si possa, segno è che la cifra posta al quoto è troppo grande.

3ª Ogni cifra del quoto è dello stesso ordine di quelle del dividendo parziale dal quale essa proviene. Se adunque un dividendo parziale non contiene il divisore, il quoto non avrà unità di quell'ordine. Perciò: quando, abbassata una cifra, il dividendo parziale non contiene il divisore, si pone uno zero al quoto, quindi si abbassa la cifra seguente.

4ª Per la stessa ragione, quando non v'è più nessun resto, e che il dividendo contiene ancora zeri non abbassati, si scrivono alla destra del quoto.

132. — ***Quoto per approssimazione.*** Quando fatta la divisione, si ha un residuo, ciò indica che il quoto ottenuto non è il vero (118), ma ne differisce meno d'un'unità.

Per esempio, dividendo 59 per 7 si ha per quoto 8, e 3 per residuo. Non si potrebbe aumentare il quoto di un'unità, poichè allora si avrebbe 9 per quoto, e 9 volte 7 fanno 63 che non si possono sottrarre da 59. Così il quoto è minore di 9, ma maggiore di 8; esso è dunque compreso tra l'8 ed il 9.

59	7
30	8,428
20	
60	
4	

Siccome un'unità vale 10 decimi, 3 unità varranno 30 decimi,

che divisi per 7 daranno 4 per quoto. Questa cifra rappresenta decimi, e si separa dalle unità colla virgola; si ha dunque ora per quoto 8,4 e per residuo due decimi. Questo nuovo quoto differisce dal vero meno d'un decimo; ma 2 decimi valgono 20 centesimi, che divisi per 7 dànno 2 centesimi, e per residuo 6 centesimi; 6 centesimi valgono 60 millesimi, che si dividono pure per 7, ecc. Lasciando così la divisione, il quoto è 8,428 che differisce dal vero meno *d'un millesimo*, perchè si hanno per residuo 4 millesimi. Dunque quando nella divisione si ha un residuo, per ottenere un quoto più esatto, conviene aggiungervi uno zero, e continuare la divisione aggiungendo successivamente zeri a ciascun residuo seguente; le nuove cifre che si ottengono saranno decimi, centesimi...., ed il quoto sarà tanto più esatto quanto più lungi si sarà spinta la divisione (*).

133. — Quando il residuo della divisione è più grande della metà del divisore, si aumenta di un'unità l'ultima cifra del quoto.

Dividendo, p. es., 5,99 per 18 si ha per quoto 0,332 e 14 millesimi per residuo; ora, prendendo 0,333 per quoto ci avviciniamo di più al vero quoto, poichè $0{,}332 \times 18 = 5{,}976$, e $0{,}333 \times 18 = 5{,}994$; 5,994 differisce dunque meno da 5,99 che da 5,976; onde risulta, che 0,333 è un quoto più esatto di 0,332.

134. — III° *Caso*. Divisione di numeri decimali.

La divisione dei numeri decimali si fonda sul seguente principio.

In ogni divisione se si moltiplica o si divide il dividendo per un numero, il quoto viene moltiplicato o diviso per lo stesso numero; se invece si moltiplica o si divide il divisore per un numero, il quoto è diviso o moltiplicato per questo numero (**).

In fatti:

1° Se il dividendo si moltiplica o si divide per 5, suppongo, esso diventa 5 volte o più grande o più piccolo, e contiene perciò il divisore un numero di volte o 5 volte maggiore o 5 volte minore; ma questo numero di volte costituisce appunto il quoto (114); dunque il quoto è 5 volte maggiore o 5 volte minore, ossia è moltiplicato o diviso per 5.

2° Se il divisore si moltiplica o si divide per 5, p. es., esso diventa 5 volte o più grande o più piccolo, ed è perciò contenuto nel dividendo un numero di volte o 5 volte minore o 5 volte maggiore; ma questo numero di volte costituisce appunto il quoto (114); dunque il quoto è 5 volte minore o 5 volte maggiore, ossia è diviso o moltiplicato per 5.

(*) Il quoto per approssimazione si dice esatto *a meno* d'un'unità, d'un decimo, ecc., secondo che l'ultima cifra rappresenta unità, decimi, ecc.

(**) Questo principio si enuncia più brevemente così:

Il quoto varia in ragione diretta del dividendo ed in ragione inversa del divisore.

Conseguenza. — *Il quoto non si altera se entrambi i termini della divisione si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero.*

Di fatti; moltiplicando il dividendo per un numero, il quoto viene moltiplicato per questo numero; e moltiplicando il divisore per lo stesso numero, il quoto è diviso pel numero medesimo; il quoto adunque, essendo nello stesso tempo moltiplicato e diviso per lo stesso numero, rimane intatto. Similmente quando amendue i termini si dividono per lo stesso numero, il quoto non viene alterato, perchè resta diviso e moltiplicato per un medesimo numero.

135. — Ciò posto la divisione dei numeri decimali si potrà sempre ridurre a quella dei numeri interi con questa semplice regola:

Si uguagli il numero delle cifre decimali nel dividendo e nel divisore aggiungendo zeri a quello che ne avesse meno o ne fosse privo; indi, tolta la virgola in entrambi, si faccia la divisione dei numeri interi risultanti; il quoto che si otterrà sarà il quoto dei numeri decimali proposti.

In fatti, il quoto non viene alterato; poichè operando in tal modo, i due termini della divisione sono moltiplicati (42) per un medesimo numero. *Esempi:*

1° Dividere 9,66 per 2,8.

966	280
1260	3,45
1400	
0000.	

2° Dividere 294 per 12,25.

29400	1225
4900	24
0000	

Osservazione. — Allorchè il solo dividendo contiene cifre decimali, si può, senza aggiungere zeri al divisore, eseguire l'operazione come se i numeri fossero interi, purchè si ponga la virgola al quoto quando si abbassa la prima cifra decimale del dividendo.

136. — ***Regola.*** *Per dividere un numero per un altro, si prendono a sinistra del dividendo tante cifre quante ce ne vogliono per contenere il divisore, il che dà il 1° dividendo parziale. Si cerca quante volte questo dividendo contiene il divisore, e si pone il quoto sotto al divisore; si moltiplica il divisore per questa cifra e si sottrae il prodotto dal dividendo parziale. Accanto al residuo si abbassa la cifra seguente del dividendo, il che dà un secondo dividendo parziale sul quale si opera come sul primo. Quando, abbassata una cifra, il dividendo non contiene il divisore, si aggiunge uno zero al quoto e si abbassa un'altra cifra. Quando l'ultimo residuo risulta 0, il quoto vien detto esatto; se v'ha residuo si formano nuove cifre al quoto aggiungendo uno zero a questo residuo e successivamente a ciascuno di quelli che si otterranno continuando la divisione, finchè si abbia il grado di approssimazione desiderato. Se il di-*

videndo o il divisore, od ambidue, hanno cifre decimali, si uguaglia nei due termini il numero di esse aggiungendo zeri, e, fatta astrazione della virgola, si opera la divisione come negl'interi.

137. — ***Osservazioni.*** 1ª Si comincia la divisione dalla sinistra, perchè a determinare una cifra del quoto, convien conoscere in qual parte del dividendo trovisi il prodotto del divisore per detta cifra (124); il che, se è facile rispetto al prodotto del divisore per la cifra del più alto ordine del quoto, riesce generalmente impossibile rispetto ai prodotti inferiori, fintantochè i prodotti superiori non siano sottratti dal dividendo.

2ª Ciascuno dei quoti parziali è minore di 10, perchè un dividendo parziale non può essere maggiore di 10 volte il divisore meno 1.

Di fatti, ogni dividendo parziale si forma scrivendo una cifra a destra del resto precedente. Ora, il resto è inferiore al divisore almeno di 1; se adunque la cifra che gli viene aggiunta fosse zero, siccome esso verrebbe moltiplicato per 10, così il dividendo parziale risultante sarebbe uguale a 10 volte il divisore meno 10 unità. Ammettiamo ora che la cifra invece di zero sia 9; in tal caso, oltre ad essere moltiplicato per 10, il resto viene ancora aumentato di 9 unità; il dividendo parziale conterrà pertanto 9 unità di più che nel caso precedente; esso adunque sarà uguale a 10 volte il divisore meno 1 (*).

138. — ***Come in alcuni casi si abbrevia la Divisione.*** 1° Per dividere un numero per 10, 100, 1000...., se è intero si separano colla virgola 1, 2, 3,.... cifre alla destra (43); se poi è decimale si trasporta la virgola di 1, 2, 3,... ordini verso sinistra (43).

2° Quando i due termini della divisione finiscono con zeri, se ne può sopprimere un numero uguale in entrambi, e dividere tra loro i numeri risultanti (134, *conseguenza*).

Per esempio, si ha $7200 : 60 = 720 : 6 = 120$.

3° Quando il divisore solo finisce con zeri si possono sopprimere tutti, e separare a destra del dividendo tante cifre quanti zeri vennero soppressi nel divisore; quindi effettuare la divisione come fu detto all'*osservazione* del num. 135. *Esempio:*

$$452718 : 9000 = 452{,}718 : 9 = 50{,}302.$$

139. — ***Prova della Divisione.*** Si può far la prova della divisione colla moltiplicazione, moltiplicando cioè il divisore pel quoto ed aggiungendo al prodotto il

---

(*) Questa verità può dimostrarsi così: Sia D il divisore; il resto sarà *al più* D — 1; quindi sia pure 9 la cifra abbassata; il dividendo parziale sarà

$$(D - 1)\ 10 + 9 = 10D - 10 + 9 = 10D - 1.$$

residuo, qualora ve ne sia; il risultato dev'essere uguale al dividendo (119).

Relazione tra la Moltiplicazione e la Divisione.

140. — Abbiamo veduto (94) che nella moltiplicazione un prodotto 48, p. es., si compone per via di 6 successive addizioni del numero 8. Vedemmo pure (114) che nella divisione il medesimo numero 48 si scompone per via di 6 successive sottrazioni del numero 8.

La moltiplicazione e la divisione sono pertanto due operazioni l'una all'altra *inverse*, non altrimenti che l'addizione e la sottrazione (81). E vi ha fra la sottrazione e la divisione il medesimo rapporto chę fra l'addizione e la moltiplicazione: queste compongono i numeri, quelle li scompongono (10).

141. — Moltiplicare, importa l'idea di aumento, come dividere importa quella di diminuzione. Ciò nondimeno il prodotto della moltiplicazione è talvolta minore del moltiplicando; ed il quoto della divisione è talvolta maggiore del dividendo.

1° Nella moltiplicazione il prodotto essendo rispetto ad uno de' fattori ciò che l'altro fattore è rispetto all'unità (97), risulta che se il moltiplicatore, p. es., è *una metà*, *un quarto*, *un quinto*, ecc. dell'unità, il prodotto sarà *una metà*, *un quarto*, *un quinto*, ecc. del moltiplicando. Dunque:

Il prodotto è minore del moltiplicando quando il moltiplicatore è minore dell'unità.

Esempio: $36 \times 0{,}25 = 9$.

2° Nella divisione il dividendo è un prodotto, il divisore e il quoto ne sono i fattori; dunque il dividendo è rispetto al quoto ciò che il divisore è rispetto all'unità. Cosicchè se il divisore è *una metà*, *un quarto*, *un quinto*, ecc. dell'unità, il dividendo è *una metà*, *un quarto*, *un quinto*, ecc. del quoto; e per conseguenza, il quoto è *doppio*, *quadruplo*, *quintuplo*, ecc. del dividendo. Dunque:

Il quoto è maggiore del dividendo quando il divisore è minore dell'unità.

Esempio: $9 : 0{,}25 = 900 : 25 = 36$.

142. — Da ciò si scorge che:

Moltiplicare un numero per *una metà*, *un quarto*, ecc., torna lo stesso che dividerlo per 2, per 4, ecc.

E reciprocamente, dividere un numero per *una metà*, *un quarto*, ecc., torna lo stesso che moltiplicarlo per 2, per 4, ecc.

Problemi sulla Divisione.

46. Un incendio deserta pressochè tutto un borgo e ne sono rovinate 17 famiglie. Apertesi nella provincia quattro soscrizioni per soccorrerle, la 1ª fruttò ll. 1831,40, la 2ª 2809, la 3ª 2813,20, e la 4ª ll. 5076,40. Ove la somma delle quattro collette sia divisa tra queste sgraziate famiglie, quanto avrà ciascuna?

47. Odone dopo fatto il computo del suo guadagno annuo, stabilisce ll. 1222,75 per la sua spesa dell'anno, e pone alla cassa di risparmio le ll. 232,15 che gli avanzano. A quanto monta la spesa ed il guadagno del dì, computando in un anno 52 domeniche e 24 feste?

48. Rodolfo lascia a sette suoi eredi ll. 1500 e 15 Ea. di terra da 450 ll. l'Ea., ma con obbligo di pagare le spese della sepoltura, che montano a ll. 160,45, di far precedere la sua bara da 40 poveri, a ciascuno dei quali si dia un pane del valore di ll. 0,70, una limosina di ll. 2,45, e m. 2,50 di panno da ll. 14,75 al m. Quanto spetta a ciascun erede, dedottene le spese?

49. La distanza media del sole alla terra è di raggi terrestri 24046,91; il raggio della terra essendo di Cm. 6366,654, e la luce percorrendo Cm. 310248 circa per minuto secondo, chiedesi quanto tempo essa impieghi per giungere a noi.

50. Con ll. 1238,75 Genesio comprò 17 sacchi di farina pesanti ciascuno 175 Cg.; posto che nel rivenderli perda ll. 148,75, domandasi: 1° il prezzo di vendita d'un Cg.; 2° quanto perderà per sacco e quanto per chilogramma.

51. Achille vende 295 Cg. di lacca per ll. 413 e vi guadagna ll. 82,60; se avesse voluto guadagnare ll. 132,16, quanti Cg. avrebbe dovuto venderne, e per qual somma?

52. Cristoforo vendè 1643 Cg. di zuccaro per lire 6161,25; se l'avesse venduto ll. 6432,75 avrebbe guadagnato ll. 904,90. Si desidera sapere: 1° il prezzo di vendita del Cg., 2° quanto lo aveva pagato in tutto, 3° qual fu il guadagno totale.

53. Un barile di 250 aringhe ne contiene 35 più d'un altro, e vale ll. 12,50. Quanto costa il secondo barile, e quanto si guadagnerebbe vendendole tutte a ll. 8 il centinaio?

54. Guglielmo comprò 875 tondi a lire 14 il centinaio; pagò lire 10,45 tra imballaggio e porto, oltre ll. 3,50 per altre spese: sapendo che ne ruppe 24 e ne regalò 12 ad una povera famiglia, si domanda: 1° quanto deve vendere ciascun tondo per guadagnare ll. 14,77, 2° quanto guadagnerebbe vendendoli ll. 0,20 ciascuno.

55. Si permutarono m. 246,40 di tela con panno stimato ll. 8,80 il m.; dicasi la quantità del panno ricevuto ed il prezzo del metro di tela, sapendosi che un m. di panno ne vale 2,75 di tela.

56. Terenzio comprò stoffa a ll. 58 ogni 8 m.; la rivendè

ll. 48,90 ogni 6 m. ed ebbe ll. 225 di guadagno. Quanti metri ne comprò?

57. Quattro termometri si pagarono ll. 80; se il 3° avesse costato 5 ll. di più, e il 1° ll. 5 di meno, sarebbesi pagato per tutti e quattro la medesima somma; qual fu il prezzo di ciascuno?

58. Due bacini possono contenere insieme El. 2745; dicasi la capacità di ciascuno, sapendosi che quella del 1° è quadrupla di quella del secondo.

59. Quirino comprò due puledri pagando il 1° 17 lire più del 2°; quattro volte il prezzo del 2°, più due volte quello del 1°, danno ll. 982. Quanto costò ciascuno?

Problemi di Ricapitolazione sulle quattro regole.

60. Teofilo si pose al giuoco con 200 pezze d'oro da 20 ll.; perdè da prima ll. 200, poi 280, indi 540, appresso 660, finalmente 1351: quanto gli rimase?

61. Per mettere i vetri a certo numero di finestre di 24 lastre da ll. 0,40 l'una, si sono pagate ll. 412,80; quante erano le finestre?

62. Comprando 75 m. di panno da ll. 12,35 il m., do in pagamento m. 132,25 di tela da ll. 4,60 il m., e un biglietto di ll. 317,90; di quanto sono ancora debitore?

63. Se il mio annuo stipendio si aumentasse di ll. 180, potrei spendere ll. 6,75 il dì; quanto ricevo io?

64. Evandro diede 148 m. di panno da ll. 13,75 il m., e m. 342 di flanella da ll. 3,15 l'uno, in pagamento di 789 steri di legna valutata ll. 6,35 lo stero; quanto deve ancora?

65. Un farmacista comperò due specie di rabarbaro cinese in ugual quantità per ll. 168; la 1ª gli costò ll. 14,50 il Cg., e l'altra ll. 6,50; dicasi la quantità ed il valore di ciascuna specie.

66. Spendendo ll. 702 in panno, ne comprai 3 pezze uguali più 6 m. a ll. 3,50 il metro; qual è la lunghezza d'ogni pezza?

67. In un assedio di 30 giorni si consumò per ll. 210600 di polvere; quanti erano i cannoni se ciascuno sparava 40 colpi il dì, e la carica era di 3 Cg. da ll. 3,25 l'uno?

68. Eutropio comperò certo numero di volumi a ll. 1,45 l'uno, a patto che ne riceverebbe 13 per 12; ora sapendo che ne ricevette 936, si domanda: 1° quante dozzine ne comperò, 2° a quanto deve rivendere il volume per guadagnare ll. 232, posto che ne regali 8.

69. Ulredo ricevette 3000 Cg. di mercanzia per ll. 37740; ne rivendè Cg. 425 per ll. 5525, e Cg. 2425 a ll. 12,75 il Cg. Dicasi: 1° quanto la pagò il Cg., 2° il prezzo del Cg. della 1ª vendita, 3° quanto ricevette per la 2ª vendita, 4° quanti Cg. gliene restano, 5° quanto guadagnò in tutto, se ne ha ancora per ll. 1887.

70. Ercole lavorò un certo numero di giorni per ll. 45; se avesse lavorato 9 giorni di più, avrebbe ricevuto ll. 67,50; qual era la sua paga del dì?

71. Rivendendo certa mercanzia per ll. 3050, si guadagna quanto aveva costato meno ll. 2500; quanto si era pagata?

72. Si comperano ostriche da due pescivendole; la 1ª ne somministra 18 dozzine meno della 2ª, e questa il triplo della 1ª; quanto devesi sborsare a ciascuna, se il prezzo di una dozzina è di ll. 0,20?

73. Si pagano le ostriche della miglior qualità a ll. 12,50 la cesta di 50 dozzine, e quelle di qualità inferiore a ll. 10; a quante dozzine della seconda qualità equivalgono 8 dozzine della prima?

74. Lire 378 sono il prezzo di 36 m. di panno; a quanto fa d'uopo rivenderlo il m. per guadagnare ll. 6 sopra ll. 40; ed a questo prezzo quanti metri ne potrà comperare un operaio colla paga di quattro settimane a ll. 18,12 l'una?

75. Un litro d'acqua marina pesa Cg. 1,026, e il sale contenutovi è di 2,5 % del peso della medesima; quanti litri d'acqua richiedonsi per ottenere 36 Cg. di sale?

76. La macchina a vapore d'un'officina lavorando notte e giorno consuma Cg. 14,538 circa di carbon fossile all'ora; se in media l'esercizio si sospende 3 giorni sopra 17, dicasi: 1° quanto carbone consumi in un anno; 2° qual ne sia il valore, sapendo che il carbone costa ll. 2,75 l'El., e che l'El. pesa 84 Cg.

77. Due corrieri partono alla stessa ora, uno da Parigi e l'altro da Bruxelles, camminando 11 ore al giorno; il 1° percorre 6 Cm. l'ora, e il 2° 9; le città distando 360 Cm., dopo quanti giorni s'incontreranno, ed a qual distanza dal luogo di loro partenza?

78. Una persona con ll. 21 comperò tre specie di nastri in quantità uguali, ai prezzi seguenti: la 1ª a ll. 1 ogni 4 m., la 2ª a ll. 3 ogni 6 m., e la 3ª a ll. 3,60 ogni 12 m. Dicasi quanti metri ne abbia comprati di ciascuna sorta.

79. Due terreni produssero, uno 18 El. di frumento e l'altro 45 El. d'orzo, in tutto per ll. 668,25. Se l'El. di frumento vale il doppio dell'El. d'orzo, trovisi il prezzo dell'uno e dell'altro.

80. Diciannove operai ricevettero 1860 ll. per 48 giorni di lavoro; ciascuno dei 12 primi guadagnava il doppio di ciascuno degli altri 7: qual è il guadagno giornaliero d'ognuno?

81. Una compagnia di 210 soldati devesi dividere ll. 1703; la parte di ciascuno dei 50 primi dovendo essere doppia di quella dei 160 ultimi, quanto toccherà a ciascuno?

82. Silberto comperò ferro ed acciaio in ugual quantità, pesante in tutto 56 Cg., e spese ll. 61,60; qual è il prezzo del Cg. di ciascun metallo, se pagò il 2° il triplo del primo?

83. Voglio spendere una certa somma in lino; se lo pago ll. 2,30 il Cg. mi rimangono ll. 6, pagandolo invece ll. 2,50 mi mancano ll. 9. Quanti chilogrammi ne voglio comperare, ed a quanto l'uno?

84. Egidio vendè m. 58,75 di velluto e m. 43,25 di raso per ll. 791,20; quindi altri m. 58,75 di velluto e m. 271,75 di raso per ll. 2984,80; qual è il prezzo dell'una e dell'altra stoffa?

85. Ulfino s'impegnò per 63 giorni, col patto di ricevere ll. 4 per ogni giorno di lavoro e di pagarne 5 per ogni dì che non lavorasse. Ora sapendo che dopo 63 giorni ricevette ll. 144, si domanda: 1° quanti giorni lavorò; 2° quanti giorni avrebbe lavorato se non avesse ricevuto nulla; 3° quanti se avesse dovuto pagare 9 lire?

86. Cosma e Damiano devono dividersi in parti uguali un campo di Ea. 18,72; Cosma offre ll. 1547 a Damiano per avere Ea. 3,40 più di lui. La proposta venendo accettata, si domanda: 1° la parte di ciascuno; 2° il valore totale del campo; 3° la somma necessaria per comperare un altro terreno di Ea. 2,38, se l'Ea. di questo vale ll. 270 più dell'Ea. del primo.

CAPO III.

PROPRIETÀ DEI NUMERI

§ 1° — RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI mediante le lettere dell'alfabeto.

143. — Nell'esporre le quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica dovemmo qua e là dimostrare qualche principio da cui si potesse dedurre un metodo per eseguire l'operazione. Se non che tali dimostrazioni portano seco due inconvenienti: 1° Dovendosi far uso di numeri, i quali hanno un valore determinato ed unico, la mente non rimane bastantemente convinta che la proprietà dimostrata e riconosciuta vera ne' numeri adoperati, si estende pure a tutti gli altri. 2° I numeri adoperati nella dimostrazione si confondono in un solo nel risultato, senza lasciar traccia veruna delle operazioni fatte per ottenerlo. Cotalchè non si può sapere se un risultato, 72 p. es., provenga o dall'una o dall'altra delle seguenti operazioni:

$$9\times8,\quad 3\times6\times4,\quad 6^2\times2,\quad 2^3\times3^2.$$

L'Algebra ovvia ad entrambi questi inconvenienti, coll'adoperare le lettere dell'alfabeto, le quali non avendo valore loro proprio possono rappresentare qualsivoglia numero. Quindi una verità dimostrata algebricamente non si applica ad uno più che ad un altro numero, sì bene a tutti quelli che nel cominciare la dimostrazione si vollero rappresentare colle lettere. Inoltre, le

operazioni non si potendo eseguire sulle lettere come sui numeri, ma dovendo rimaner indicate, i risultati conservano le tracce e delle quantità che li formano, e del modo con cui li formano. Abbiasi, p. es., il risultato $a^3 \times b^2$; se al principio dell'operazione si convenne che a rappresentasse 2 e b 3, a^3 varrà 8 e b^2 9, onde si avrà $a^3 \times b^2 = 72$. Ora quest'espressione lascia conoscere che per ottenere 72 si è elevato 2 alla terza potenza, e 3 alla seconda, poi si sono moltiplicate tra loro queste due potenze.

Crediamo pertanto conveniente prima di inoltrarci nelle proprietà dei numeri, spiegare alcuni segni ed alcune denominazioni di cui fa uso l'Algebra, affinchè d'ora innanzi, ove la chiarezza, la brevità o la generalità lo richiegga, possiamo fare algebricamente le dimostrazioni.

144. — ***Segni.*** Per indicare le operazioni da farsi sulle quantità, o le relazioni fra esse esistenti, si adoperano in algebra i medesimi segni usati in aritmetica (58). Nondimeno per indicare la moltiplicazione s'interpone ai fattori un semplice punto, od anche scrivonsi le lettere una dopo l'altra senza segno di sorta.

Così $a.b.c.$, ovv. abc indica $a \times b \times c$.

145. — ***Coefficiente.*** Il *coefficiente* è un numero scritto alla sinistra d'una quantità espressa da una o più lettere, e dinota quante volte essa vien ripetuta.

Così $3a$ significa $a+a+a$, ossia $3 \times a$.

Una quantità senza coefficiente scritto, ha per coefficiente sottinteso l'unità.

146. — ***Esponente.*** L'*esponente* è un numero scritto alla destra d'una lettera ed alquanto in alto (99), e dinota quante volte si prende come fattore la quantità da essa rappresentata.

Così, a^3 indica $a \times a \times a$, ovv. $a.a.a.$, od anche aaa.

Una lettera senza esponente scritto, ha per esponente sottinteso l'unità.

147. — ***Termine.*** Dicesi *termine* una quantità algebrica unita ad altre coi segni + o —. Un termine si chiama *positivo* se è preceduto dal segno +, e *negativo* se dal segno —. Si dicono *termini simili* quelli che sono formati dalle stesse lettere affette dai medesimi esponenti; tali termini si possono ridurre in un solo mediante addizioni e sottrazioni.

Così i termini $12ab^2 + 5ab^2 - 3ab^2 - 7ab^2$ sono simili e si riducono a $7ab^2$.

Un termine non preceduto da verun segno è considerato come avente il segno +.

148. — ***Monomio e polinomio.*** Secondo che una espressione algebrica consta di uno, due, tre o quattro termini, essa dicesi *monomio*, *binomio*, *trinomio* o *quadrinomio;* e si chiama generalmente *polinomio* l'espressione di più termini.

149. — ***Membro.*** Nell'uguaglianza (59) la parte a sinistra del segno $=$ si dice *primo membro* e la parte a destra *secondo membro*.

150. — ***Proprietà delle uguaglianze.*** 1ª Si può trasportare un termine dall'uno all'altro membro dell'uguaglianza senza ch'essa venga alterata, purchè si cambi il segno del termine trasportato.

In fatti sia l'uguaglianza $a + b = c - d$.

Togliendo da ambi i membri la quantità b l'uguaglianza sussiste (54—3°), e si ha $a + b - b = c - d - b$; ma $b - b = 0$, dunque il 1° membro si riduce ad a, e si ha

$$a = c - d - b,$$

in cui si vede che il termine b cambiò segno col cambiar membro.

2ª — Due o più uguaglianze danno risultati uguali quando si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, o si dividono *membro a membro*, cioè i primi membri tra loro ed i secondi tra loro.

Questa proprietà emerge dagli assiomi 3° e 4°, N. 54.

Perciò dalle uguaglianze $a = b$, e $c = d$, si dedurranno le seguenti

$$a + c = b + d,\ a - c = b - d,\ ac = bd,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Rappresentazione de' Numeri pari, de' Numeri impari e dell'Unità de' diversi ordini.

151. — Numeri **pari** chiamansi tutti i multipli di 2, ossia (93) i prodotti di qualsivoglia numero moltiplicato per 2.

Tali sono i numeri:	0,	2,	4,	6,	8,	10,	12,....
provenienti da	0.2,	1.2,	2.2,	3.2,	4.2,	5.2,	6.2,...

Perciò rappresentando con n qualsiasi numero, tutti i numeri pari saranno compresi nell'espressione

$$2n.$$

Di fatti, ponendo successivamente invece di n 0, 1, 2, 3,.....
si ottengono i numeri pari..... 0, 2, 4, 6,.....

I numeri che non sono pari si dicono **impari.**

Tali sono 1, 3, 5, 7, 9, 11, che si ottengono aggiungendo o togliendo 1 da un numero pari. Perciò tutti i numeri impari sono compresi in una qualsiasi delle espressioni $2n+1$ o $2n-1$, le quali si compendiano nella seguente

$$2n\pm1.$$

152. — Poichè si ha $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$,..... rappresentando sempre con n un numero qualsivoglia, le unità di tutti gli ordini (*) saranno comprese nell'espressione

$$10^n$$

Il numero 10^1, ossia 10, è il più piccol numero di 2 cifre; 10^2, ossia cento, è il più piccol numero di 3 cifre; ed in generale 10^n è il più piccol numero di $n+1$ cifra. Se dunque si rappresenta con N un numero di $n+1$ cifra, esso sarà maggiore di 10^n, e minore di 10^{n+1}; il che si esprime così:

$$10^n<N<^{n+1}.$$

Rappresentazione di un Numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze del 10.

153. — Ogni numero può considerarsi (61) come la somma delle unità dei diversi ordini che lo compongono.

Sia dunque 247356; si avrà

$$247356=200000+40000+7000+300+50+6$$
$$=2.100000+4.10000+7.1000+3.100+5.10+6.$$

Ma (99) si ha: $100000=10^5$, $10000=10^4$, $1000=10^3$, ecc.; dunque $247356=2.10^5+4.10^4+7.10^3+3.10^2+5.10+6$.

Rappresentando con a, b, c, ecc., le cifre delle unità, delle decine, delle centinaia, ecc., e scrivendo i termini del secondo membro in ordine inverso, si avrà il polinomio

$$a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4+f.10^5+.....,$$

ordinato secondo le potenze ascendenti del 10, e che rappresenta qualsivoglia numero scritto nel *sistema decimale.*

(*) *Qualsivoglia quantità che abbia* zero *per esponente, equivale all'unità.* Ciò si deduce supponendo che l'esponente diminuisca successivamente fino a zero

Es. $a^4=aaaa.1$; $a^3=aaa.1$; $a^2=aa.1$; $a^1=a.1$; $a^0=1$.

Per conseguenza l'unità del 1° ordine è pure essa compresa nell'espressione 10^n, e corrisponde ad $n=0$.

§ 2° — DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

154. — Tratteremo ora dei vari sistemi di numerazione, e dimostreremo che in ciascun di essi qualsivoglia numero può venir rappresentato con un polinomio analogo al precedente.

155. In ogni sistema di numerazione analogo al decimale, le unità si distinguono in ordini, e si conviene che un *certo numero* d'unità d'un ordine formi un'unità dell'ordine immediatamente superiore. Questo numero chiamasi *base* del sistema. Il sistema volgare ha per base il numero *dieci*, e chiamasi perciò *decadico* o *decimale*. Il sistema che avesse per base il numero *due*, *tre*, *quattro*, *dodici*, ecc., si direbbe *binario*, *ternario*, *quaternario*, *duodenario*, ecc.

156. — Determinata la base, tutti i numeri si possono esprimere a voce (*numerazione parlata*) mediante poche parole, delle quali alcune esprimono il numero delle unità di ciascun ordine, altre a qual ordine appartengono queste medesime unità (26).

Vuolsi però notare che tali parole debbono essere differenti in ciascun sistema, od almeno avere differente significazione; per esempio, se nel sistema binario si vuol chiamare *migliaio* l'unità del quart'ordine, che è la collezione di sole *otto* unità semplici, chiaro si vede che si cambia il significato di tale parola.

157. — Per rappresentare i numeri colla scrittura (*numerazione scritta*), si indica il numero delle unità di ciascun ordine mediante semplici caratteri o cifre; e l'ordine a cui appartengono queste unità viene indicato dal posto che occupano le cifre, andando da destra verso sinistra; cosicchè una medesima cifra può rappresentare unità di qualsivoglia ordine.

Col mezzo di tale artifizio, qualunque sia il sistema, per rappresentare tutti i numeri bastano tante cifre quante sono le unità della base, compresavi una cifra insignificativa o *zero*, il cui scopo è di far occupare dalle altre il posto conveniente all'ordine delle unità che rappresentano.

158. — ***1° Esempio.*** Supponiamo che la base del sistema sia *sette*. Si richiederanno sette caratteri, p. es. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; i sei ultimi indicano i sei primi numeri.

Aggiungendo un'unità al 6 si ottiene il numero 7, ossia l'unità del 2° ordine, che si scrive . . . . . 10.

L'unità del 3° ord. ne vale 7 del 2°, ossia $7^2 = 49$, e si scrive 100;
» 4° » 3° » $7^3 = 343$ » 1000;
» 5° » 4° » $7^4 = 2401$ » 10000.

I numeri compresi tra sette e quattordici si scriveranno:

11, 12, 13, 14, 15, 16.

Aggiungendo un'unità al 16 si ottiene il numero quattordici, il quale contenendo due unità del 2° ordine, deve scriversi 20.

I numeri compresi tra quattordici e ventuno si scriveranno:

21, 22, 23, 24, 25, 26.

Aggiungendo un'unità al 26, si ottiene il numero ventuno, il quale contenendo tre unità del 2° ordine, deve scriversi 30, ecc.

Il numero 542364 contenendo 4 unità del 1° ordine, 6 del 2°, 3 del 3°, 2 del 4°, 4 del 5° e 5 del 6°, scritto nel sistema settenario rappresenta la somma seguente:

$$4+6.7+3.7^2+2.7^3+4.7^4+5.7^5.$$

159. — **2° *Esempio.*** Se la base del sistema fosse *dodici*, si richiederebbero dodici caratteri, per es.:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β,

rappresentano con α e β i numeri *dieci* e *undici.*

Aggiungendo un'unità a β, si otterrebbe il numero 12, ossia l'unità del 2° ordine, che si scriverebbe dieci.

Le unità del 3°, del 4°, del 5°... ordine si scriverebbero 100, 1000, 10000,... e corrisponderebbero rispettivamente ai numeri 12^2, 12^3, 12^4,...

Il numero $67\alpha4\beta9$, scritto nel sistema duodenario rappresenta la somma

$$9+\beta.12+4.12^2+\alpha12^3+7.12^4+6.12^5.$$

Questi due esempi sono sufficienti a far capire che:

In generale, indicando con B la base, e con a, b, c,... le cifre dei diversi ordini, qualunqne numero, scritto in qualsivoglia sistema, può, come nel sistema decimale, venir rappresentato da un polinomio della forma.

$$a+b.B+c.B^2+d.B^3+e.B^4+f.B^5+g.B^6+.....$$

160. — ***Problema 1°.*** *Scrivere nel sistema decimale un numero scritto in un sistema di qualsivoglia base.*

Sia il numero 542364 scritto nel sistema settenario.

Dopo averlo espresso per mezzo d'un polinomio ordinato secondo le potenze della base (158), si riducono le unità di tutti gli ordini in unità di 1° ordine, eseguendo le operazioni indicate in ciascun termine; quindi si sommano i risultati.

Operazione . . . . . $\left\{\begin{array}{rcr} 4 & = & 4 \\ 6.7 & = & 42 \\ 3.7^2=3.49 & = & 147 \\ 2.7^3=2.343 & = & 686 \\ 4.7^4=4.2401 & = & 9604 \\ 5.7^5=5.16807 & = & 84035 \end{array}\right.$

Il numero proposto si scrive adunque nel sist. decim. 94518

161. — ***Problema 2°.*** *Scrivere in un sistema di qualsivoglia base un numero scritto nel sistema decimale.*

Sia il numero 94518 scritto nel sistema decimale, da tradursi nel sistema settenario.

Poichè il numero proposto contiene 94518 unità di 1° ordine, e che nel sistema settenario sette di queste fanno un'unità del 2° ordine, dividendo 94518 per 7, il quoto 13502 rappresenta le unità del 2° ordine (138—5°) del numero cercato, ed il resto 4 indica le unità di 1° ordine che avanzano nel medesimo. Dunque il 4 è la prima cifra a destra.

Similmente il numero contenendo 13502 unità di 2° ordine, se dividesi 13502 per 7, il quoto 1928 rappresenta le unità del 3° ordine in esso comprese ed il resto 6 le unità del 2° ordine che avanzano. Dunque il 6 è la seconda cifra.

Continuando così a dividere sempre l'ultimo quoto per la base 7, finchè si ottenga *zero* per quoto intero, i resti delle successive divisioni saranno rispettivamente le cifre del 1°, del 2°, del 3°... ordine del numero richiesto.

Operazione . . . . .

94518	: 7 =	13502,	resto	4
13502	: 7 =	1928	»	6
1928	: 7 =	275	»	3
275	: 7 =	39	»	2
39	: 7 =	5	»	4
5	: 7 =	0	»	5

Il numero proposto si scrive dunque nel sist. setten. 542364.

Si noti come i due precedenti problemi si verificano l'un l'altro.

162. — ***Problema 3°.*** *Scrivere in qualsivoglia sistema un numero scritto in altro sistema qualsiasi.*

Si traduca il numero proposto nel sistema decimale (160); poi da questo nel sistema dato (161) (*).

Esercizi sui Sistemi di numerazione.

87. Tradurre nel sistema *senario* i numeri: 741238; 2104623 e 98472010, scritti nel sistema *decimale.*

88. Esprimere nel sistema *decimale* il valore dei numeri:

(*) Si potrebbe ancora proporre di cercare qual sia la base del sistema in cui un dato numero decimale è scritto con determinate cifre. Questo problema però affine di essere trattato generalmente richiede le più alte teoriche algebriche. Poniamo qui due esempi che potranno risolversi coi principii insegnati nel *Compendio d'Algebra per A. e C.*

1° Es. *In qual sistema il n. decimale* 106 *è scritto colle cifre* 254? Chiamando x la base cercata, si ha l'equazione $2x^2 + 5x + 4 = 106$, da cui si deduce $x = 6$; dunque il numero è scritto nel sistema *senario.*

2° Es. *In qual sistema il n. decimale* 62877 *è scritto colle cifre* 4003002? Chiamando x la base cercata, si ha l'equazione $4x^6 + 3x^3 + 2 = 62877$, da cui si deduce $x = 5$; dunque il numero è scritto nel sistema *quinario.*

134241; 3512405 e 465526, essendo il 1° scritto nel sistema *quinario*, il 2° nel *senario* ed il 3° nel *settenario*.

89. I numeri 896; 7012 e 6894 sono espressi nel sistema *duodenario;* si traducano nel *ternario*.

90. Un cronologista chiede ad un matematico: In qual anno prima di G. C. morirono Pitagora ed Archimede? La morte del primo, risponde il matematico, avvenne nell'anno che nel sistema *quinario* si esprime colle cifre 3442, e precedette quella del secondo di un numero d'anni rappresentato con 555 nel sistema *settenario*. Si risponda alla questione del cronologista (*).

§ 3° — TEOREMI RELATIVI ALLA MOLTIPLICAZIONE.

163. — ***Teorema 1°.*** *Si moltiplica una somma per un numero, moltiplicando ciascuna parte di essa per questo numero, e sommando i risultati.*

Sia la somma $a+b+c+d$ da moltiplicarsi per m, il che si indica così $(a+b+c+d)\,m$; dico che si avrà

$$(a+b+c+d)m = am+bm+cm+dm.$$

(V. la dimostrazione, n. 102).

164. — ***Teorema 2°.*** *Si moltiplica una somma per un'altra moltiplicando tutte le parti della prima successivamente per ciascuna parte della seconda, e poi sommando i risultati.*

Sia la somma $a+b+c+d$ da moltiplicarsi per $m+n$.

Quest'operazione consiste nel prendere $(a+b+c+d)$ tante volte quante unità sono in m, più tante volte quante unità sono in n, ossia nel moltiplicare $(a+b+c+d)$ per m, quindi per n, e sommare i risultati. Ora, si ha (163)

$$(a+b+c+d)m = am+bm+cm+dm,$$

e

$$(a+b+c+d)n = an+bn+cn+dn;$$

dunque

$$(a+b+c+d)\,(m+n) = am+bm+cm+dm+an+bn+cn+dn.$$

165. — ***Teorema 3°.*** *Si moltiplica la differenza di due numeri per un altro numero, moltiplicando ciascun termine della differenza pel numero moltiplicatore, e sottraendo i risultati.*

Sia da moltiplicare $a-b$ per m; dico che si avrà

$$(a-b)m = am-bm.$$

In fatti moltiplicare $(a-b)$ per m gli è (92) prendere m volte la quantità $(a-b)$; dunque

---

(*) Vedi inoltre i problemi 259, 260 e 261.

$$(a-b)m = (a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots (m \text{ volte})$$
$$= a-b+a-b+a-b+\ldots$$
$$= a+a+a+\ldots -b-b-b-\ldots,$$

cioè m volte a, meno m volte b; dunque

$$(a-b)\,m = am - bm.$$

166. — ***Teorema 4°.*** *Si moltiplica la differenza di due numeri per la differenza di due altri moltiplicando la prima differenza successivamente per ciascun termine della seconda, e sottraendo i risultati.*

Sia $a-b$ da moltiplicarsi per $m-n$; dico che si avrà

$$(a-b)\,(m-n) = (am-bm) - (an-bn).$$

In fatti, moltiplicando $a-b$ per m si ha $am-bm$; ma siccome m doveva essere prima diminuito di n, e non lo fu, la quantità $(a-b)$ venne ripetuta n volte di troppo, onde il risultato $am-bm$ contiene n volte $(a-b)$, ossia $an-bn$ di troppo; questa quantità vuol dunque esserne tolta, il che dà

$$(a-b)\,(m-n) = (am-bm) - (an-bn).$$

167. — ***Teorema 5°*** *Il prodotto di più fattori non cambia, in qualsivoglia ordine si eseguisca la moltiplicazione.*

(Questo teorema venne già dimostrato (100) pel caso di due fattori).

Dimostreremo dapprima che in un prodotto di qualsivoglia numero di fattori si possono invertere i due ultimi.

Siano a e b questi due fattori, e P il prodotto di tutti i precedenti; dico che si avrà $Pab = Pba$.

In fatti, si ha (92)

$$Pa = P+P+P+\ldots \ (a \text{ volte});$$

e quindi (163)

$$Pab = (P+P+P+\ldots)\,b = Pb+Pb+Pb+\ldots$$

Ma quest'ultima somma contenendo a volte il termine Pb, essa è uguale a Pba; dunque

$$Pab = Pba.$$

Dimostriamo ora che in un prodotto $abcde$ di un numero qualsiasi di fattori, uno di essi può occupare successivamente tutti i posti da destra a sinistra, ed altresì da sinistra a destra.

Giusta la dimostrazione antecedente, il fattore e può trasferirsi innanzi a d; dunque si ha . . . $abcde = abced$.

Per la stessa ragione $abce = abec$, onde moltiplicando ambo i membri per d si avrà (54).

$abced = abecd$; dunque . . . . . $abcde = abecd$.

Similmente $abe = aeb$, onde moltiplicando per cd si ha $abecd = aebcd$; dunque . . . . . $abcde = aebcd$.

Finalmente $ae = ea$, onde moltiplicando per bcd risulta $aebcd = eabcd$; dunque . . . . . $abcde = eabcd$.

Dalle precedenti uguaglianze si vede come, senza alterare il prodotto, *e* fattore e venne trasferito da destra a sinistra in tutti i posti.

Ora, per ciò appunto esso può retrocedere da sinistra a destra; giacchè verrebbe ad occupare i medesimi posti di prima. Di più ciò che si dice del fattore *e* può dirsi di tutti gli altri; dunque *in un prodotto* abcde, *qualsivoglia fattore può occupare qualunque ordine.*

Dal che vien dimostrato l'enunciato teorema.

168. — ***Teorema 6°.*** *Si moltiplica un numero per un altro, moltiplicandolo successivamente per ciascun de' fattori di quest'altro* (V. n. 104).

Sia il numero 72 da moltiplicarsi per 24; dico che si avrà:

$$72\times24=72\times3\times4\times2.$$

In fatti, si ha $24=3\times4\times2$; ora moltiplicando ambi i membri per 72 si ottiene $24\times72=3\times4\times2\times72$, e quindi (167)

$$72\times24=72\times3\times4\times2.$$

169. — ***Corollario.*** *Il prodotto di due numeri consta del prodotto di tutti i fattori del moltiplicando e del moltiplicatore.*

In fatti, si ha $72=6\times3\times4$; dunque si può nell'uguaglianza precedente porre $6\times3\times4$ invece di 72, e risulta

$$72\times24=6\times3\times4\times3\times4\times2.$$

170. — ***Teorema 7°.*** *Se si moltiplica uno dei fattori d'un prodotto per un numero, il prodotto resta moltiplicato per lo stesso numero.* (V. n. 106).

Infatti, si ha (168) $72\times3\times4\times2=72\times24$,

e quindi (167) $(3\times72)\times4\times2=24\times72$;

cioè moltiplicando 3, che è fattore di 24, per 72, il 24 stesso trovasi moltiplicato per 72.

171. — ***Corollario.*** *Se si moltiplicano per numeri diversi i due fattori d'una moltiplicazione, il prodotto sarà moltiplicato per gli stessi numeri, e conseguentemente* (168) *pel loro prodotto.*

172. — ***Teorema 8°.*** *Si moltiplicano tra loro due potenze d'uno stesso numero col sommare i loro esponenti.*

Sia da moltiplicare a^4 per a^3; dico che si avrà $a^4\times a^3=a^{4+3}$.

In fatti, $a^4=aaaa$, e $a^3=aaa$;

quindi (169) $a^4\times a^3=aaaa.aaa=a^7=a^{4+3}$.

Esempi: $7^3\times7^2=7^5$, $a^2b^4\times a^3b=a^5b^5$,

$$4a^2bc^4\times5ab^3c^2d=20a^3b^4c^6d.$$

173. — ***Numero delle cifre del prodotto.*** *Il prodotto di due numeri ha tante cifre quante ne contengono i due fattori, ovvero una di meno.*

Sia M un numero di $m+1$ cifra, e N un altro di $n+1$ cifra; dico che il prodotto MN avrà $m+n+2$ ovvero $m+n+1$ cifra.

In fatti, si ha (152)

$$10^m < M < 10^{m+1},$$

e

$$10^n < N < 10^{n+1}.$$

Moltiplicando membro a membro, queste due espressioni, i risultati saranno nella stessa relazione, perchè i numeri maggiori saranno moltiplicati per numeri maggiori. Dunque ha luogo la relazione

$$10^{m+n} < MN < 10^{m+n+2}.$$

Il prodotto MN è pertanto compreso fra 10^{m+n} e 10^{m+n+2}, cioè (152) fra il più piccolo numero di $(m+n+1)$ cifra ed il più piccolo numero di $(m+n+3)$; esso contiene dunque *almeno* $(m+n+1)$ cifra, ed *al più* $(m+n+2)$.

§ 4° — TEOREMI RELATIVI ALLA DIVISIONE.

174. — ***Teorema 1°.*** *Per dividere un prodotto per uno de' suoi fattori, basta sopprimere questo fattore.*

Sia il prodotto abc da dividersi per b; dico che il quoto sarà ac.

Di fatti, moltiplicando ac pel divisore b si ottiene il dividendo abc; dunque ac è il quoto.

175. — ***Corollario 1°.*** *Per dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori del prodotto per questo numero.*

Sia il prodotto $a \times 6 \times b \times c$ da dividersi per 3; dico che basta dividere per 3 il fattore 6.

In fatti, il prodotto $a \times 6 \times b \times c$ è uguale a $a \times 3 \times 2 \times b \times c$, e questo viene diviso per 3 col sopprimere il fattore 3 (n° ant.); ma sopprimendo il 3 viene pure diviso il 6; dunque il prodotto $a \times 6 \times b \times c$ si divide col dividere uno de' suoi fattori.

176. — ***Corollario 2°.*** Dal precedente corollario e dal teorema 7° della moltiplicazione risulta che:

Se si moltiplica uno de' fattori d'un prodotto per un numero, e si divide un altro fattore per lo stesso numero, il prodotto non varia.

177. — ***Teorema 2°.*** *Dividere un numero successivamente per varii fattori, torna lo stesso che dividerlo pel prodotto di questi fattori.*

Sia il numero N da dividersi per a, poi il quoto q per b, quindi il 2° quoto q' per c; dico che il 3° quoto q'' si ottiene pure dividendo N pel prodotto abc.

Infatti, poichè $\frac{N}{a} = q$, si ha (115) $N = aq$;

» $\frac{q}{b} = q'$ » $q = bq'$;

» $\frac{q'}{c} = q'$ » $q' = cq''$.

Si possono moltiplicare membro a membro queste tre uguaglianze (150), il che dà $Nqq' = aqbq'cq''$. In questa si possono sopprimere successivamente i fattori q e q' in ambi i membri (174), e risulta $N = abcq''$, ossia

$$N = abc \times q''.$$

Il numero N essendo il prodotto di due fattori abc e q'', dividendolo pel primo fattore si otterrà il secondo; dunque

$$\frac{N}{abc} = q''.$$

178. — **Corollario 1°**. *Se più fattori d'un prodotto si dividono rispettivamente per vari numeri, il prodotto stesso resta diviso per quello dei numeri divisori* (175, 177).

179. — **Corollario 2°**. *Per dividere un numero per un altro, basta sopprimere nel dividendo tutti i fattori del divisore* (174, 177).

180. — **Corollario 3°**. *Si dividono l'una per l'altra due potenze d'un medesimo numero, col sottrarre l'esponente del divisore da quello del dividendo.*

In vero, sia a^7 da dividere per a^4; si avrà (n° ant.)

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{aaaaaaa}{aaaa} = aaa = a^3 = a^{7-4}.$$

Esempi: $42^6 : 42^4 = 42^2$, $a^2b^4 : ab^2 = ab^2$,
$9a^6b^3 : 3a^4b = 3a^2b^2$.

181. — **Teorema 3°**. *In una divisione se si moltiplica o si divide il dividendo per un numero, il quoto viene moltiplicato o diviso per lo stesso numero; se invece si moltiplica o divide il divisore per un numero, il quoto è diviso o moltiplicato per questo numero* (V. la dimostraz. n° 134).

182. — **Corollario.** *Il quoto non si altera se entrambi i termini della divisione si moltiplicano o si dividono per uno stesso numero.*

183. — **Teorema 4°**. *Quando la divisione dà un resto, se si moltiplicano o si dividono ambidue i termini per un numero, il resto viene moltiplicato o diviso per lo stesso numero.*

Sia a il dividendo, b il divisore, q il quoto e r il resto; si avrà $a = bq + r$, da cui si deduce, moltiplicando i due membri per m,

$$am = bm \times q + rm.$$

Ora la quantità rm è minore di bm, pertanto il nuovo dividendo am contiene q volte il nuovo divisore bm, più una quantità rm minore di esso. Questa quantità è dunque il nuovo resto, il quale uguaglia il primo moltiplicato per m. L'altra parte del teorema si dimostra retrocedendo dalla 2ª alla 1ª uguaglianza.

184. — ***Teorema 5°.*** *Si divide una somma per un numero, dividendo ciascuna parte di essa per questo numero, e sommando i quoti parziali.*

Sia la somma $a+b+c+d$ da dividersi per m; dico che si avrà

$$\frac{a+b+c+d}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}.$$

In fatti, nel secondo membro di questa espressione se si moltiplica ciascun dividendo parziale a, b,... per m, i quoti corrispondenti saranno moltiplicati per m (181), e perciò la loro somma sarà pure moltiplicata per m (163). Si ha dunque

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}\right) m = \frac{am}{m} + \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m} + \frac{dm}{m}.$$

Ma le divisioni del 2° membro si effettuano (174) col sopprimere l'm; il che dà

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}\right) m = a+b+c+d.$$

L'espressione $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}$ moltiplicata pel divisore m ha riprodotto il dividendo $a+b+c+d$; dunque essa è il quoto.

185. — ***Teorema 6°.*** *Si divide la differenza di due numeri per un altro numero, dividendo ciascun termine della differenza pel numero divisore, e sottraendo i risultati.*

Sia la differenza $a-b$ da dividersi per m; dico che si avrà

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

La dimostrazione è simile alla precedente.

186. — ***Numero delle cifre del quoto.*** *Il numero delle cifre del quoziente è uguale alla differenza tra il numero delle cifre del dividendo ed il numero delle cifre del divisore, ovvero a questa differenza aumentata d'un'unità.*

Siano D le cifre del dividendo, d quelle del divisore e q quelle del quoziente. Il dividendo essendo il prodotto del divisore pel quoto, esisterà (173) tra il numero delle cifre di ciascuno di questi tre numeri una delle relazioni

$$d+q = D \text{ ovv. } d+q-1 = D;$$

dalle quali si deduce (150) $\quad q = D-d \text{ ovv. } q = D-d+1.$

Alcune applicazioni dei precedenti principii.

187. — ***Moltiplicazione e divisione d'un polinomio.*** Abbiasi da moltiplicare per m il polimonio

$$a+b-c-d.$$

Si ha da prima $a+b-c-d=(a+b)-(c+d)$; giacchè sottrarre successivamente c e d, torna lo stesso che sottrarre di tratto la loro somma.

Perciò si avrà pure $m(a+b-c-d)=m\{(a+b)-(c+d)\}$;

e quindi (165, 163), $m(a+b-c-d)=m(a+b)-m(c+d)$
$=am+bm-(cm+dm)$
$=am+bm-cm-dm;$

cioè che :

Per moltiplicare un polinomio per un monomio, basta moltiplicare ciascun termine di esso pel monomio, e scrivere i prodotti parziali co' medesimi segni che hanno i termini corrispondenti del moltiplicando.

Esempi : $5ab(3a^2+4ab-b^2)=15a^3b+20a^2b^2-5ab^3$;

$4mn(2m-4+mna)=8m^2n-16mn+4m^2n^2a$;

$9(240-120+36-16)=9\times240-9\times120+9\times36-9\times16$
$=2160-1080+324-144$
$=1080+180-1260.$

Un ragionamento simile al precedente dimostra altresì che :

Per dividere un polinomio per un monomio, basta dividere ciascun termine di esso pel monomio, e scrivere i quoti parziali coi medesimi segni che hanno i termini corrispondenti del dividendo.

Esempi :

$$\frac{20a^3b^2c^3-10a^4b^2c^2+15a^3b^4c^3}{5a^3b^2c}=\frac{20a^3b^2c^2}{5a^3b^2c}-\frac{10a^4b^2c^2}{5a^3b^2c}+\frac{15a^3b^4c^3}{5a^3b^2c}$$
$$=4c^2-2ac+3b^2c^2;$$

$$\frac{1350-720+4356-4005}{9}=150-80+484-445=70+39=109.$$

188. — ***Mettere a fattore comune una quantità.*** Se nel primo dei due precedenti esempi si moltiplica il quoto pel divisore, si avrà

$$20a^3b^2c^3-10a^4b^2c^2+15a^3b^4c^3=5a^3b^2c(4c^2-2ac+3b^2c^2).$$

La quantità $5a^3b^2c$, posta fuori della parentesi nel 2° membro, dicesi *messa a fattore comune*. Dunque per mettere una quantità a fattore comune in un polinomio si divide questo per quella, e si indica la moltiplicazione del quoto pel divisore.

189. — ***Liberare dai loro divisori i termini d'un'uguaglianza.*** Abbiasi l'uguaglianza

$$\frac{a}{b}+c-\frac{m}{n}=p.$$

Moltiplicando i due membri per b, si ha

$$\frac{ab}{b}+cb-\frac{mb}{n}=pb, \text{ ovv. } a+cb-\frac{mb}{n}=pb.$$

Similmente moltiplicando i due membri di quest'ultima per n, risulta

$$an+cbn-\frac{mbn}{n}=pbn, \text{ ovv. } an.+cbn-mb=pbn.$$

Si vede che per moltiplicare $\frac{a}{b}$ per b e $\frac{mb}{n}$ per n bastava sopprimere i divisori b e n; onde s'inferisce che:

Si può togliere il divisore di un termine d'un'uguaglianza, purchè si moltiplichino gli altri termini per questo divisore.

190. — ***Risolvere un'equazione.*** Venga proposto questo problema. *Trovare un numero il cui quintuplo diminuito di* 13 *sia uguale al triplo del medesimo aumentato di* 11.

Rappresentando con x il numero che si cerca, il quintuplo diminuito di 13 verrà espresso con $5x-13$, ed il triplo aumentato di 11 con $3x+11$. Ora queste due espressioni debbono essere uguali; dunque il numero rappresentato con x dev'essere tale che si abbia

$$5x-13=3x+11.$$

Trasferendo i termini incogniti nel 1° membro, e i termini cogniti nel 2°, si ottiene (150)

$$5x-3x=11+13.$$

Mettendo x a fattore comune nel 1° membro, viene (188)

$$x(5-3)=11+13.$$

Riducendo (147), si ha

$$2x=24.$$

E finalmente dividendo ambidue i membri per 2, risulta

$$x=12,$$

cioè che il numero cercato è 12. In fatti, togliendo 13 dal quintuplo di 12 resta 47, ed aggiungendo 11 al triplo di 12, si ottiene pure lo stesso numero 47. Or bene:

L'espressione dell'uguaglianza di due quantità non attualmente uguali, ma racchiudenti un'incognita da determinarsi in modo che quelle siano uguali, dicesi **equazione.** E il determinare il valore dell'incognita che rende uguali le due quantità, si chiama **risolvere l'equazione.**

191. — Proponiamoci di risolvere l'equazione letterale

$$ax+(a-b)x=\frac{(ac+b)x}{c}+\frac{(a^2c-b^2x)c}{bc}-a.$$

Si ottiene successivamente :

1° Facendo sparire i divisori (189),

$$acx+(a-b)cx=(ac+b)x+\frac{(a^2c-b^2x)c}{bc}-ac$$

e $ac^2bx+(a-b)bc^2x=(ac+b)bcx+(a^2c-b^2x)c-abc^2$.

2° Effettuando le moltiplicazioni indicate (187),

$$ac^2bx+abc^2x-b^2c^2x=abc^2x+b^2cx+a^2c^2-b^2cx-abc^2.$$

3° Trasportando i termini che contengono l'x nel 1° membro e gli altri nel 2°,

$$ac^2bx+abc^2x-b^2c^2x-abc^2x+b^2cx+b^2cx=a^2c^2-abc^2.$$

4° Mettendo x a fattore comune nel 1° membro (188),

$$x(ac^2b+abc^2-b^2c^2-abc^2-b^2c+b^2c)=a^2c^2-abc^2.$$

5° Riducendo il polinomio compreso nella parentesi (147),

$$x(abc^2-b^2c^2)=a^2c^2-abc^2.$$

6° Dividendo pel coefficiente di x, cioè per $(abc^2-b^2c^2)$,

$$x=\frac{a^2c^2-abc^2}{abc^2-b^2c^2.}$$

7° Dividendo i due termini della divisione per c^2,

$$x=\frac{a^2-ab}{ab-b^2.}$$

8° Mettendo a a fattore comune nel dividendo e b nel divisore,

$$x=\frac{a(a-b)}{b(a-b).}$$

9° Finalmente dividendo i due termini della divisione per $a-b$,

$$x=\frac{a}{b}.$$

Il valore dell'incognita è dunque $\frac{a}{b}$.

192. — Supponiamo che la risoluzione d'un'equazione abbia condotto all'espressione

$$x=\frac{72\times35\times70\times20}{200\times36\times49\times5}.$$

Invece di eseguire le moltiplicazioni indicate, e quindi la divisione, riuscirà molto più semplice dividere successivamente il dividendo e il divisore per uno stesso numero. Si ottiene così

successivamente:

$$x=\frac{72\times35\times70\times20}{200\times36\times49\times5}=\frac{8\times35\times70\times20}{200\times4\times49\times5}$$
$$=\frac{8\times35\times7\times20}{20\times4\times49\times5}=\frac{8\times5\times7\times20}{20\times4\times7\times5}=\frac{8}{4}=2.$$

Il quadro dell'operazione indica bastantemente per quali numeri si è diviso.

§ 5° — TEOREMI SULLA DIVISIBILITÀ DEI NUMERI.

193. — Un numero intero dicesi *divisibile* per un altro quando dividendo quello per questo si ottiene un quoto intero.

Rappresentando pertanto con a e b due numeri interi, se a è divisibile per b il quoto m è pure intero, e si ha

$$(1) \qquad a=mb.$$

In tal caso il dividendo essendo il prodotto di due numeri interi, esso è multiplo di ciascuno di essi (93). Quindi una stessa cosa significano le quattro seguenti espressioni.

24 è divisibile per 6,
24 è un multiplo di 6,
6 è un divisore di 24,
6 è un fattore di 24.

194. — Da ciò risulta il principio seguente, su cui poggia tutta la teorica della divisibilità dei numeri.

Ogni numero è divisibile per ciascuno de' suoi fattori; e nessun numero è divisibile per un altro, il quale non sia un suo fattore.

Ogni qualvolta adunque nelle seguenti dimostrazioni un numero a potrà mettersi sotto la forma (1), esso sarà divisibile per b.

195. — ***Teorema 1°.*** *Se un numero* b *ne divide un altro* a, *esso divide pure qualsivoglia multiplo* an *di* a.

In vero, poichè a è divisibile per b, si ha (193) $a=mb$; quindi moltiplicando per n, risulta

$$an=mnb;$$

dunque an è divisibile per b (194); giacchè b è uno de'suoi fattori.

196. — ***Teorema 2°.*** *Se un numero* b *divide tutte le parti* p, q, r,... *d'una somma* a *esso divide pure la somma stessa.*

In fatti, a essendo la somma, si ha $a=p+q+r$, e quindi (184), $\frac{a}{b}=\frac{p}{b}+\frac{q}{b}+\frac{r}{b}$. Ma le parti p, q, r essendo divisibili

per b, i quoti del 2° membro sono numeri interi, onde tale è pure la loro somma; rappresentiamola con m; risulta

$$\frac{a}{b}=m, \text{ ossia } a=mb.$$

Dunque a è divisibile per b (194).

197. — ***Teorema 3°.*** *Se un numero* b *ne divide due altri* p *e* q, *esso divide pure la loro differenza* a.

In vero, poichè a è la differenza, si ha $a=p-q$, e quindi (185) $\frac{a}{b}=\frac{p}{b}-\frac{q}{b}$. Ma i due termini del 2° membro sono numeri interi, e perciò tal è pure la loro differenza; rappresentandola con m, si avrà

$$\frac{a}{b}=m, \text{ ossia } a=mb.$$

Dunque a è divisibile per b (194).

198. — ***Corollario 1°.*** *Se un numero divide la somma di due parti e una di queste, esso divide pure l'altra parte.*

In fatti, quest'altra parte è la differenza tra la somma e la parte divisibile.

199. — ***Corollario 2°.*** *Se un numero divide la somma di due parti e non la prima parte, esso non divide neanco la seconda.*

In vero, poichè il numero divide la somma, se dividesse la seconda parte dividerebbe pure la prima (coroll. ant.)

200. — ***Teorema 4°.*** *Se un numero* d *ne divide due altri* a *e* b, *esso divide pure il residuo* r *della loro divisione.*

Ed in vero, chiamando q la parte intera del quoto di a diviso per b, si ha $qb+r=a$, onde

$$r=a-qb.$$

Ma a è divisibile per d, e qb lo è pure perchè multiplo di b; dunque la differenza r è divisibile per d (197).

Caratteri di divisibilità.

201. — Esistono contrassegni dai quali soventi volte si può conoscere *a priori* se un numero sia divisibile per un altro. Tali contrassegni si dicono **caratteri di divisibilità.** Dai precedenti teoremi si deducono i caratteri di divisibilità d'un numero per i numeri 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25 e 125.

202. — ***Divisibilità per 2 e 5.*** Ogni numero si

può scomporre in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 2 e di 5, e la seconda sia la cifra delle unità del numero.

In fatti, sia a un numero qualsivoglia; chiamando n la cifra delle unità, e m il numero formato dalle altre cifre, si avrà

$$a = m.10 + n, \text{ ossia } a = m.2.5 + n.$$

La prima parte è divisibile per 2 e per 5 (194); se adunque la seconda è divisibile per gli stessi numeri, tale sarà pure il numero a (196). Ora perchè l'ultima cifra possa dividersi per 2 bisogna che sia un multiplo di 2, cioè una delle cifre pari: 0, 2, 4, 6, 8, (151); e perchè possa dividersi per 5 bisogna che sia 5 oppure 0. Dunque:

1° *Un numero è divisibile per 2 quando termina con zero o con cifre pari.*

Esempi: 13790, 73416, 981504.

2° *Un numero è divisibile per 5 quando termina con zero o con 5.*

Esempi: 47890, 37195.

203. — ***Divisibilità per 4 e 25.*** Ogni numero si può scomporre in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 4 e di 25, e la seconda sia il numero formato dalle ultime due cifre a destra del numero che si considera.

In vero, sia a un numero qualsivoglia, n il numero formato dalle due cifre a destra, e m quello formato dalle altre cifre; si avrà

$$a = m.100 + n, \text{ ossia } a = m.4.25 + n.$$

La prima parte è divisibile per 4 e per 25 (194); se adunque la seconda è divisibile per gli stessi numeri, tale sarà pure il numero a (196). Dunque:

1° *Un numero è divisibile per 4 quando le due cifre a destra sono due zeri, oppure formano un numero divisibile per 4.*

Esempi: 137900, 74912, 198352.

2° *Un numero è divisibile per 25 quando finisce con due zeri, ovvero con* 25, 50 o 75.

Esempi: 371900, 46725, 798150, 58975.

204. — ***Divisibilità per 8 e 125.*** Ogni numero si può scomporre in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 8 e di 125, e la seconda sia il numero formato dalle tre ultime cifre a destra del numero che si considera.

In fatti, sia a un numero qualsivoglia, n il numero formato dalle tre cifre a destra, e m quello formato dalle altre cifre, si avrà

$$a = m.1000 + n, \text{ ossia } a = m.8.125 + n.$$

Dalla quale uguaglianza si conchiude, come nei casi precedenti, che se n, è divisibile per 8 e per 125, tale sarà pure il numero a. Dunque:

1° *Un numero è divisibile per* 8 *quando le tre cifre a destra sono tre zeri, oppure formano un numero divisibile per* 8.

Esempi: 3719000, 467896, 7139168.

2° *Un numero è divisibile per* 125 *quando le tre cifre a destra sono tre zeri, oppure formano un numero divisibile per* 125.

Esempi: 4103000, 10125, 79250, 7001375.

205. — ***Divisibilità per 9.*** Ogni numero si può scomporre in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 9, e la seconda sia la somma delle cifre componenti il numero.

Questa proposizione si fonda sul principio seguente:

L'unita di qualsivoglia ordine è un multiplo di 9, *più* 1.

In fatti,

$1=0+1=9.0+1$; $10=9+1=9.1+1$; $100=99+1=9.11+1$; ecc.

Quindi rappresentando con m un multiplo di 9, l'unità dei diversi ordini potrà esprimersi con $m+1$.

Ciò posto, sia il numero 27981; si ha

$$27981=20000+7000+900+80+1.$$

Ora,

$$20000=2.10000+2(m+1)=2m+2.$$
$$7000=7.1000\ =7(m+1)=7m+7.$$
$$900=9.100\ \ =9(m+1)=9m+9.$$
$$80=8.10\ \ \ =8(m+1)=8m+8.$$
$$1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0+1.$$

Donde $27981=(2m+7m+9m+8m)+(2+7+9+8+1)$.

La somma compresa nella prima parentesi è divisibile per 9, perchè ciascuna parte di essa è un multiplo di 9; la seconda parentesi consta della somma delle cifre componenti il numero.

Dunque il numero 27981 è composto di due parti, di cui la prima è un multiplo di 9, e la seconda è la somma delle cifre del numero. E poichè la precedente scomposizione può effettuarsi sopra qualsivoglia numero, si conchiude che:

Un numero è divisibile per 9 *se la somma delle sue cifre è divisibile per* 9.

Esempi: 12514266, 3627189.

206. — ***Divisibilità per 3.*** Ogni numero può scomporsi in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 3, e la seconda sia la somma delle cifre componenti il numero.

Questa verità emerge dalla scomposizione fatta al n° preco-

dente; giacchè la somma compresa nella prima parentesi essendo un multiplo di 9, è pure un multiplo di 3.

Da ciò risulta che:

Un numero è divisibile per 3 *se la somma delle sue cifre è divisibile per* 3.

207. — ***Divisibilità per 11.*** Ogni numero può scomporsi in due parti, di cui la prima sia un multiplo di 11, e la seconda sia la differenza tra la somma delle cifre di ordine impari (1°, 3°, 5°,....) e la somma delle cifre di ordine pari (2°, 4°, 6°,....).

Questa proposizione si fonda sul principio seguente:

L'unità d'ordine impari diminuita di 1, *e l'unità d'ordine pari aumentata di* 1 *sono multipli di* 11. In fatti.

1° $1-1=0=0.11$; $100-1=99=9.11$; $10000-1=9999=9900+99=9.11.100+9.11$.

2° $10+1=11=1.11$; $1000+1=990+10+1=990+11=9.11.10+11$.

Quindi rappresentando con m un multiplo di 11, l'unità d'ordine impari potrà esprimersi con $m+1$, e quella d'ordine pari con $m-1$.

Ciò posto, sia il numero 738628; si ha

$$738628=700000+30000+8000+600+20+8.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
700000&=7.100000=7(m-1)=7m-7\\
30000&=3.10000=3(m+1)=3m+3\\
8000&=8.1000=8(m-1)=8m-8\\
600&=6.100=6(m+1)=6m+6\\
20&=2.10=2(m-2)=2m-2\\
8&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0+8
\end{aligned}$$

Donde

$$738628=(7m+3m+8m+6m+2m)+\{(3+6+8)-(7+8+2)\}.$$

La somma compresa nella prima parentesi è un multiplo di 11, perchè ciascuna delle sue parti è divisibile per 11; la quantità compresa nelle grappe è la differenza tra la somma delle cifre d'ordine impari e quella delle cifre d'ordine pari che compongono il numero proposto.

Da ciò conseguita che:

Un numero è divisibile per 11 *se la differenza tra la somma delle cifre d'ordine impari e la somma delle cifre d'ordine pari è divisibile per* 11.

Esempio: 83619271824

ord. imp. $4+8+7+9+6+8=42$
ord. par. $2+1+2+1+3=9$
differenza... $=\overline{33}=3.11$.

208. — ***Divisibilità per 6, 12, 15 e 18.*** Se un

numero è divisibile per due altri che non abbiano fattori comuni, esso è divisibile pel loro prodotto.

Dimostreremo questa proposizione nella teorica dei numeri primi (244); ecco intanto le conseguenze che immediatamente ne derivano:

1° *Un numero è divisibile per 6 se è divisibile per 2 e per 3.*

2° *Un numero è divisibile per 12 se è divisibile per 3 e per 4.*

3° *Un numero è divisibile per 15 se è divisibile per 3 e per 5.*

4° *Un numero è divisibile per 18 se è divisibile per 2 e per 9* (*).

209. — ***Conoscere a priori il resto d'una divisione.*** Per iscoprire i caratteri di divisibilità d'un numero per 2 e 5, 4 e 25, 8 e 125, 9, 3, 11, abbiamo scomposto il numero in due parti, di cui la prima è un multiplo del divisore; da ciò risulta, che se il numero proposto non è divisibile pel divisore dato, il resto della divisione proviene unicamente dalla seconda parte. Quindi il resto della divisione d'un numero per 2 è lo stesso che il resto della divisione per 2 dell'ultima cifra del numero; il resto della divisione d'un numero per 8 è lo stesso che il resto della divisione per 8 delle tre cifre a destra del numero; il resto della divisione d'un numero, p. es. 95423 per 9, sarà quello che si ottiene dividendo per 9 la somma $9+5+4+2+3=23$ delle sue cifre.

Il resto della divisione per 11 dipende dalla differenza tra la somma delle cifre d'ordine impari e quella delle cifre d'ordine pari. Chiamiamo R il resto che si ottiene dividendo per 11 questa differenza. *Se la prima somma è maggiore della seconda, il resto cercato sarà* R; *nel caso contrario sarà* 11 — R (**).

Esercizi sulla Divisibilità dei numeri.

91. Ciascuno dei numeri 774; 2775; 83644; 85481; 729484756; 749250 e 107811000, quali divisori ammette fra i seguenti: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 15, 25 e 125?

(*) Vedi inoltre (N. 95, 96 e 97 dei problemi) i caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e 37, la cui dimostrazione vien data nel *soluzionario*.

(**) Quest'ultimo caso può dimostrarsi così:

Allorchè la somma delle cifre d'ordine pari è maggiore dell'altra la differenza delle somme è negativa, e si ha (207) $N=m.11-d$, in cui N è il numero proposto, $(m.11)$ un multiplo di 11, e d la differenza. Ma questa differenza contiene altresì un multiplo $(n.11)$ di 11, più un resto R minore di 11. Si avrà dunque:

$$N=m.11-(n.11+R)=11(m-n)-R=M.11-R;$$

ovvero, togliendo ed aggiungendo 11:

$$N=M.11-11+11-R=11(M-1)+(11-R).$$

Donde scorgesi che N diviso per 11 dà $M-1$ per quoto e $11-R$ per resto.

92. Determinare, senza effettuare la divisione, i resti che si otterrebbero dividendo i numeri 422574607 e 2958012249 per ciascuno dei seguenti: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25 e 125.

Teoremi da dimostrare.

93. Se un numero N è un multiplo *più* 1 d'un altro numero n, tutte le potenze del primo sono altresì multipli *più* 1 del secondo.

94. Se un numero N è un multiplo *meno* 1 d'un altro numero n, tutte le potenze impari N^3, N^5, N^7,... del primo sono altresì multipli *meno* 1 del secondo, e tutte le potenze pari N^2, N^4, N^6,... di quello sono multipli *più* 1 di questo.

95. Un numero è divisibile per 7, per 11, o per 13 se, scomponendolo in gruppi di tre cifre da destra a sinistra, la differenza tra la somma dei gruppi d'ordine impari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 7, per 11 o per 13.

96. Un numero è divisibile per 37 se la somma dei gruppi di tre cifre, cominciando a destra, è divisibile per 37.

97. Per conoscere se un numero sia divisibile per 17 bisogna, cominciando a destra:

1° Scomporlo in gruppi di due cifre, e separare questi in serie di quattro gruppi ciascuna;

2° Moltiplicare il 1°, 2°, 3° e 4° gruppo d'ogni serie rispettivamente per 1, 2, 4 e 8;

3° Fare dei risultanti prodotti due somme, di cui la prima contenga i prodotti d'ordine impari delle serie impari e quelli d'ordine pari delle serie pari, la seconda gli altri prodotti.

Se la differenza di queste due somme è divisibile per 17, tale sarà altresì il numero proposto (*).

§ 6° — PROVA PER 9 DELLE QUATTRO OPERAZIONI.

210. — La grande facilità con cui si ottiene il resto della divisione d'un numero per 9 (n° ant.), somministra metodi molto spediti per fare la prova delle quattro operazioni.

211. ***Prova per 9 dell'Addizione.*** ***Teorema.*** *Se più numeri* a, b, c,.... *si dividono per uno stesso divisore* d, *e si sommano i resti* r, r', r'',... *la somma dei numeri dati e la somma di questi resti divisi per lo stesso divisore* d *danno resti uguali.*

In fatti, chiamando q, q', q'',... la parte intera dei quoti di a, b, c,... per d, si hanno le uguaglianze:

$$a = dq + r,\ b = dq' + r',\ c = dq'' + r'',$$

(*) Vedi inoltre i teoremi 111, 112, 113, 114, 115 (pag. 92).

le quali sommate membro a membro danno

$$a+b+c = dq+dq'+dq''+r+r'+r'',$$

ossia (188)

$$a+b+c=d(q+q'+q'')+(r+r'+r'').$$

La somma dei numeri dati a, b, c, si trova così scomposta in due parti, di cui la prima è un multiplo di d; perciò se questa somma divisa per d dà un residuo, esso proviene dalla seconda parte. Dunque le somme $a+b+c$ e $r+r'+r''$ divise per d danno lo stesso residuo (*).

Da ciò s'inferisce la seguente

Regola. — *Per fare la prova del 9 dell'addizione di più numeri, si divide per 9 ciascuno di essi: si fa la somma di tutti i resti che si ottengono da queste divisioni, e la si divide per 9: il resto che ne risulta dev'essere uguale a quello che si ottiene dividendo per 9 il totale dei numeri dati.*

Siano da sommare i numeri 45386, 3679, 89197.

Il resto di	45386	*diviso per* 9 *è*	8
»	3679	»	7
»	89197	»	7
	138262		22
Resti delle somme	4	.....	4

212. — **Prova per 9 della Sottrazione.** Poichè nella sottrazione il minuendo è la somma del sottraendo e del residuo, da quanto si disse sull'addizione (n° ant.), si ha la seguente

Regola. *La prova per 9 della sottrazione si fa come nell'addizione, considerando il sottraendo ed il residuo come i due numeri da sommarsi, ed il minuendo come la loro somma.*

Abbiasi da sottrarre 83769 da 715982.

Resti delle somme	5	.....	5
	715982		14
Il resto di	83769	*diviso per* 9 *è*	6
	632213	»	8

(*) Da questo teorema si deduce un carattere di divisibilità applicabile a tutti i numeri. Ogni numero N, potendo (153) prendere la forma

$$N=a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4+f.10^5+\ldots,$$

si compone di a parti uguali a 1, più b parti uguali a 10, più c parti uguali a 100, ecc. Laonde chiamando r', r'', r''',... i resti che si ottengono dividendo per D le unità del 1°, del 2°, del 3°,... ordine, la somma dei resti di tutte le parti di N sarà $a.r'+b.r''+c.r'''+d.r''''+\ldots$ Ma giusta il teorema questa somma divisa per D dà il medesimo resto che darebbe il numero N; dunque:

Un numero è divisibile per qualsivoglia altro numero D, *quando questo divide la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando le cifre delle unità, decine, centinaia, ecc..., rispettivamente pei resti della divisione di* 1, 10, 100, 1000, *ecc..., pel medesimo numero* D.

213. — ***Prova per 9 della Moltiplicazione.*** ***Teorema.*** *Se due numeri* a *e* b *si dividono per uno stesso numero* d, *e si moltiplicano tra loro i resti* r *e* r', *il prodotto dei numeri dati ed il prodotto di questi divisi per lo stesso numero* d, *danno resti uguali.*

In vero, chiamando q e q' la parte intera dei quoti di a e b per d, si hanno le uguaglianze

$$a = qd + r,\ b = q'd + r',$$

le quali moltiplicate membro a membro danno (164)

$$ab = (qd+r)\ (q'd+r') = qq'd^2 + q'dr + qdr' + rr',$$

ossia (188) $$ab = d(qq'd + q'r + qr') + rr'.$$

Il prodotto ab dei numeri dati si trova così scomposto in due parti, di cui la prima è un multiplo di d; perciò se questo prodotto diviso per d dà un resto, esso proviene dalla seconda parte. Dunque i prodotti ab e rr' divisi per d danno lo stesso resto.

Da ciò s'inferisce la seguente

(***Regola.*** — *Per fare la prova per 9 della moltiplicazione di due numeri, si divide per 9 ciascuno di essi; si fa il prodotto dei due resti che si ottengono da queste divisioni, e lo si divide per 9: il resto che ne risulta dev' essere uguale a quello che si ottiene dividendo per 9 il prodotto dei numeri dati.*)

Debbasi moltiplicare 34762 per 75.)

Il resto di ..... 34762 *diviso per* 9 *è* 4
» ..... 75 » 3

173810
243334

2607150 — 12

Resti dei prodotti 3 3

214. — ***Prova per 9 della Divisione.*** Poichè nella divisione il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto aumentato del resto, da quanto si disse sulla moltiplicazione (n° ant.), si ha la seguente

(***Regola.*** — *Per fare la prova per 9 della divisione, si sottrae il resto dal dividendo; poi considerando il numero che rimane come il prodotto, il divisore ed il quoto come i fattori, si opera come nella moltiplicazione.*)

Abbiasi da dividere 34762 per 78.

34762	78	*diviso per* 9 *dà di resto*	6
356	445	» » »	4
442			
Resto della divisione	52		
Prod. del quoto pel divisore	34710		24
Resti dei prodotti	6		6

215. — ***Osservazione.*** Quando nel fare la prova per 9

non riescono uguali i due resti, la cui uguaglianza deve decidere dell'esattezza dell'operazione, questa è certamente errata (se pure l'errore non è nella prova stessa); se invece risultano uguali i due resti, non si può conchiudere con certezza che l'operazione sia esatta: 1° Perchè si può nell'operazione aver scritto 0 invece di 9, e viceversa; in tal caso i resti della divisione per 9 sono i medesimi. 2° Perchè una cifra deficiente può essere compensata da una troppo grande, in modo che la somma delle cifre non sia alterata.

216. — ***Prova per 11 delle quattro operazioni.*** Essendochè i principii su cui si fonda la prova per 9 (211, 213) sono generali, è chiaro che invece del 9 si potrebbe prendere un divisore qualsiasi. Quindi si suol talvolta adoperare il numero 11. Pertanto le prove per 11 delle quattro operazioni non differiranno punto da quelle sin qui esposte per il 9, salvo che nel modo di ottenere i resti delle divisioni per 11 (209).

§ 7° — MASSIMO COMUN DIVISORE DEI NUMERI INTERI.

217. — Un numero che ne divide esattamente più altri, si dice **divisore comune** de' medesimi. Il maggiore tra i divisori comuni a più numeri chiamasi il loro **massimo comun divisore.**

Tratteremo dapprima del massimo comun divisore di due numeri, poscia di quello comune a più di due numeri; indicandolo per brevità colle iniziali M. C. D.

Ricerca del Massimo comun divisore di due numeri.

218. — ***Teorema 1°.*** *Se due numeri* a *e* b *sono divisibili l'uno per l'altro, il loro M. C. D. è uguale al numero minore* b.

In fatti, il numero b è divisore *comune*, perchè divide se stesso, e per supposizione divide a; esso è il *massimo*, perchè un numero maggiore di b non può dividere b.

219. — ***Teorema 2°.*** *Se due numeri* a *e* b *non sono divisibili l'uno per l'altro, il loro M. C. D. è il medesimo che il M. C. D. del numero minore* b *e del resto* r *della loro divisione.*

In vero, chiamando q la parte intera del quoto di a per b, si ha

$$a = bq + r.$$

Ora, osservando che bq è un multiplo di b, s'inferisce da questa uguaglianza: 1° che se un numero divide b e r, esso divide

a (196); 2° che se un numero divide a e b, esso divide r (198). Per conseguenza tutti i divisori comuni ad a e b sono pure comuni a b e r; e reciprocamente tutti i divisori comuni a b e r sono altresì comuni ad a e b. Dunque il M. C. D. di a e b sarà anche il M. C. D. di b e r.

220. — Da questi due teoremi s'inferisce la seguente

Regola. *Per trovare il M. C. D. di due numeri, dividasi il maggiore pel minore; se la divisione è esatta, il minore de' due numeri è il M. C. D. Se v'ha un resto, dividasi il minor numero per questo resto; se la divisione si fa esattamente, questo resto è il M. C. D. Se questa seconda divisione dà ancora un resto, dividasi il primo resto pel secondo; se la divisione è esatta, il secondo resto è il M. C. D. Si continui così finchè la divisione non dia più alcun resto; l'ultimo divisore sarà il M. C. D cercato.*

Venga proposto di cercare il M. C. D. dei numeri 1014 e 1404.

Dividendo 1404 per 1014, si ottiene 390 per resto.
» 1014 » 390 » 234 »
» 390 » 234 » 156 »
» 234 » 156 » 78 »
» 156 » 78 » 0 »

Il massimo comun divisore dei numeri proposti è dunque 78.

1° È divisore *comune*. In fatti nell'ultima divisione 78 divide 156;
nella 4ª 78 dividendo 78 e 156, divide 234 (219 — 1°),
» 3ª » 156 e 234 » 390 »
» 2ª » 234 e 390 » 1014 »
» 1ª » 390 e 1014 » 1404 »

2° È il *massimo*. In fatti, il M. C. D. de' numeri proposti: nella 1ª divisione, dividendo 1404 e 1014, deve dividere 390 (219-2°)
» 2ª » » 1014 e 390 » 234 »
» 3ª » » 390 e 234 » 156 »
» 4ª » » 234 e 156 » 78 »

Ma il maggior numero che divida 78 è 78 stesso; dunque 78 è il M. C. D. di 1404 e di 1014.

In pratica l'operazione si dispone così:

	1	2	1	1	2	*Quoziente*
1404	1014	390	234	156	78	*Divisori*
390	234	156	78	0		*Resti*

Osservazione. — Se nella ricerca del M. C. D. di due numeri si ottiene 1 per ultimo resto, si deve conchiudere che i numeri proposti non hanno altro divisore comune che l'unità.

211. — **Corollario 1°.** *Se un numero ne divide due altri, esso divide pure il loro massimo comun divisore.*

In vero, nella precedente dimostrazione si è veduto che ogni divisore comune ai due numeri proposti 1014 e 1404, divide pure i due termini 234 e 156 dell'ultima divisione, e che ogni divisore comune a questi divide pure il M. C. D. 78; dunque tutti i numeri che dividono i due numeri proposti, dividono altresì il loro M. C. D.

222. — **Corollario 2°**. *Se si moltiplicano o si dividono due numeri per un medesimo numero, il loro M. C. D. viene moltiplicato e diviso per lo stesso numero.*

In fatti, col moltiplicare o dividere i due numeri proposti, il resto della prima divisione risulta moltiplicato o diviso per lo stesso numero (183). Nella seconda divisione questo resto diventa divisore, ed il divisore della prima diventa dividendo; perciò il secondo resto sarà anch'esso moltiplicato o diviso pel numero medesimo. Così continuando a ragionare si viene a conchiudere che l'ultimo resto, ossia il M. C. D., si trova moltiplicato o diviso per lo stesso numero.

223. — **Corollario 3°**. *Se due numeri si dividono pel loro M. C. D., questo viene diviso per se stesso, e diventa l'unità.*

Ricerca del Massimo comun divisore di più di due numeri.

224. — **Teorema.** *Il massimo divisore comune a più di due numeri* a, b, c, d, *è quello stesso comune al M. C. D. di due qualunque fra essi ed ai rimanenti numeri.*

Sia *m* il massimo comun divisore di *a* e *b*, p. es.; dico che il M. C. D. di *a*, *b*, *c*, *d*, sarà lo stesso che quello di *m*, *c*, *d*.

In fatti: 1° Se un numero divide i quattro numeri *a*, *b*, *c*, *d*, dividendo esso *a* e *b*, divide il loro massimo comun divisore *m* (221).

2° Se un numero divide i tre numeri *m*, *c*, *d*, dividendo esso *m*, divide pure *a* e *b* che sono multipli di *m*.

Per conseguenza tutti i divisori comuni ad *a*, *b*, *c*, *d*, sono pure comuni a *m*, *c*, *d*; e reciprocamente, tutti i divisori comuni a *m*, *c*, *d*, sono altresì comuni ad *a*, *b*, *c*, *d*. Dunque il M. C. D. di *a*, *b*, *c*, *d* sarà anche il M. C. D. di *m*. *c*. *d*.

225. — Da questo teorema s'inferisce la seguente

Regola. — *Per trovare il M. C. D. di più di due numeri, si cerchi da prima il M. C. D. di due qualunque dei numeri dati; quindi cerchisi il M. C. D. del numero trovato e di un altro dei numeri dati; poi il M. C. D. del secondo numero ottenuto e di un quarto de' numeri dati. Si continui di questo modo finchè siasi operato sopra tutti i numeri dati: l'ultimo massimo comun divisore sarà il cercato.*

Venga proposto di trovare il M. C. D. dei numeri 168, 756, 2058 e 4725.

Cercando il M. C. D di 168 e di 756, si ottiene 84,
» » 84 » 2058 » 42,
» » 42 » 4725 » 21.

Il M. C. D. dei quattro numeri proposti è dunque 21.

1° Esso è *divisore comune*. In fatti, dividendo 42 e 4725 esso divide 84 e 2058, multipli di 42; e dividendo 84, esso divide 168 756, multipli di 84.

2° Esso è il *massimo* divisore comune. In fatti, il M. C. D. dei numeri 168, e 756, 2058 4725 dividendo 168 e 756, deve dividere (221) il loro M. C. D. 84; dividendo 84 e 2058, deve dividere il loro M. C. D. 42; e dividendo 42 e 4725, deve dividere il loro M. C. D. 21. Dunque esso non può essere maggiore di 21.

Osservazione. — Nella ricerca del M. C. D. di più di due numeri conviene, per maggiore semplicità, incominciare dai numeri minori.

Esercizii sul Massimo comun divisore.

98. Trovisi il massimo comun divisore, 1° di 756 e 6435; 2° di 350 e 9075; 3° di 1365, 3185 e 5733; 4° di 2244, 3366, 6171 e 8228.

99. Un campo di forma rettangolare ha m. 156 di larghezza su 169 di lunghezza; qual è la lunghezza della maggior catena che misura esattamente le due dimensioni?

100. Una società di beneficenza spartì tra certo numero di poveri tre pezze di panno, in modo che, tutte le parti essendo uguali, ciascuna fosse tolta da una sola pezza e della massima lunghezza possibile. Ora, sapendo che la 1ª pezza era di m. 504, la 2ª di 792, e la terza di 1848, si domanda quanto panno ebbe ciascun povero, e tra quanti venne ripartita ogni pezza.

101. Vuolsi circondare di alberi, piantati alla massima comune distanza, un podere di forma quadrilatera. Quanti alberi occorreranno, se il primo lato del podere ha 6300 m., il 2° 3960, il 3° 3024 ed il 4° 3780?

§ 8° — TEORICA DEI NUMERI PRIMI.

226. Chiamasi **numero primo** un numero che non è divisibile se non per se stesso e per l'unità.

Sono pertanto numeri primi i seguenti 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

227. — Due numeri si dicono **primi tra loro**, quando non hanno altro divisore comune fuorchè l'unità.

Così, 9 e 25 sono numeri primi tra loro.

Risulta da ciò, che due numeri primi sono sempre *primi tra loro*, mentre che due numeri primi tra loro possono non essere *primi in sè*.

228. — Due numeri consecutivi a e $a+1$ sono primi tra loro; poichè se avessero un divisore comune, questo dovrebbe dividere la loro differenza (197); ma tale differenza è il numero primo 1, il quale non ammette altro divisore che l'unità.

229. — ***Teorema 1°.*** *Se un numero* a *non è primo, esso ammette almeno un divisore primo* d.

In fatti, giusta la definizione (226), il numero a non essendo primo ammette dei divisori minori di sè e maggiori di 1.

Sia d il più piccolo di questi divisori: se d non fosse primo, ammetterebbe almeno un divisore più piccolo ancora di sè, il quale dividerebbe a; ora ciò è contro l'ipotesi.

Da questo teorema conseguita che se due numeri a e b hanno un divisore comune d, essi avranno un divisore *primo* comune; il quale dividerà pure i numeri a e b. Dunque:

Se due numeri non sono primi tra loro, essi ammettono almeno un divisore primo *comune.*

230. — ***Teorema 2°.*** *Se un numero* a *non ammette nessun divisore primo, il cui quadrato non lo superi, esso non ne ammette nessun altro, ed è perciò numero primo.*

Di fatti, supponiamo che il numero a, il quale non è divisibile per nessuno dei numeri primi il cui quadrato non lo supera, ammetta nondimeno altri divisori primi, e sia d il più piccolo di essi; si avrà $d^2 > a$, ossia

$$(1) \quad d \times d > a.$$

Dividendo a per d, si otterrà un quoto intero q, e si avrà

$$(2) \quad d \times q = a;$$

in cui si vede che a è divisibile per q. Ora nella relazione (1) si può mettere invece di a la quantità uguale $d \times q$, il che dà $d \times d > d \times q$; dividendo quindi ambo i numeri per d, risulta

$$(3) \quad d > q.$$

Ciò posto, o q è primo o ammette un divisore primo ancora più piccolo di sè il quale divide pure a; dunque in entrambi i casi il numero a sarebbe divisibile per un numero primo minore di d; il che è contro l'ipotesi.

231. — ***Corollario.*** *Per conoscere se un numero sia primo, basta dividerlo successivamente per i numeri primi* 2, 3, 5,... *fin-*

chè si ottenga un quoziente minore del divisore; se nessuna di queste divisioni riesce esatta, il numero è primo.

Di fatti, quando il quoto q è minore del divisore d, il quadrato di questo è maggiore del dividendo a; poichè sostituendo d a q nell'uguaglianza (2), questa si trova alterata e diventa

$$d \times d > a, \text{ ossia } d^2 > a.$$

232. — ***Teorema 3°.*** *La serie de' numeri primi è infinita.*

In fatti, supponiamo che ciò non sia vero. In tal caso esisterà un numero primo che sarà maggiore di tutti gli altri. Rappresentiamo questo numero con n, e chiamiamo P il prodotto di tutti i numeri primi; si avrà

$$P = 2.3.5.7.11.13.....n.$$

Se è vero che n è il maggiore de' numeri primi, aggiungendo 1 a questo prodotto, la somma $P+1$, che è maggiore di n sarà un numero non primo, ed ammetterà (229) almeno un divisore primo. Ma ciò non è possibile, perchè P e $P+1$ sono primi tra loro (228), e siccome tutti i numeri primi dividono P, così nessuno di essi divide $P+1$. Dunque è impossibile che n sia il maggiore de' numeri primi, e quindi è impossibile che la serie de' numeri primi sia limitata.

233. — ***Ricerca d'un'espressione generale che comprenda tutti i numeri primi.*** Abbiamo veduto (151) che tutti i numeri interi sono compresi nelle espressioni $2n$ e $2n \pm 1$, di cui la prima dà i numeri pari, e la seconda i numeri impari. Ora tali espressioni non sono già le sole che comprendano tutti i numeri; se invece di partire dal 2 si parte, p. es. dal 6, la serie di tutti i numeri interi si avrà dalle sei seguenti

$$6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+5.$$

Di fatti, mettendo zero invece di n, queste espressioni danno rispettivamente 0, 1, 2, 3, 4, 5; mettendo quindi 1 invece di n, si otterranno i numeri 6, 7, 8, 9, 10, 11; col mettere 2 invece di n si otterranno i sei seguenti, ecc.

Le espressioni $6n$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, danno dei numeri divisibili per 2 o per 3. Se dunque si vogliono i soli numeri primi bisognerà conservare solamente le altre due, cioè

$$6n+2 \text{ e } 6n+5.$$

Ma un multiplo di 6 aumentato di 5 è uguale al successivo multiplo di 6 diminuito di 1; cosicchè i numeri compresi in $6n+5$ sono pure compresi in $6n-1$. Dunque *tutti i numeri primi* (eccettuati 2 e 3) *sono dati dall'espressione*

$$6n \pm 1.$$

Osservazione. — Quantunque tutti i numeri primi maggiori di 3 siano dati dalla precedente espressione, non devesi però credere che tutti i numeri dati dalla medesima siano primi. Così, se $n = 4$, si hanno i numeri 25 e 23, di cui uno non è primo; se $n = 11$, si hanno 67 e 65, di cui uno non è primo.

234. — ***Formazione d'una tavola di numeri primi.*** Per trovare tutti i numeri primi compresi fra certi limiti, p. es., fra 1 e 2000, il metodo più breve è quello inventato da Eratostene; il quale consiste nel cancellare dalla serie naturale dei numeri tutti quelli che non sono primi.

A tale fine si scrivono per ordine di grandezza tutti i numeri da 1 fino a 2000, poi si ragiona così:

Tutti i numeri pari essendo divisibili per 2, non sono primi; perciò partendo dal 2 esclusivamente si cancellano di due in due i termini della serie.

Tutti i multipli di 3 non sono primi; perciò partendo dal 3 esclusivamente si cancellano di tre in tre i termini che seguono. (In tal modo si cancelleranno de' termini già cancellati, p. es., 6 e 12, ma ciò non monta).

Tutti i multipli di 5 non sono primi; perciò partendo dal 5 esclusivamente si cancelleranno di cinque in cinque i numeri seguenti.

Quindi si prende il 7, poi l'11, ecc., tenendo sempre lo stesso procedere.

I numeri che alla fine rimangono sono tutti i numeri primi compresi tra 1 e 2000.

Questo metodo di trovare i numeri primi prese il nome di *Crivello d'Eratostene.*

Osservazione. — Si può abbreviare l'operazione precedente in conseguenza del teorema n° 230. Dopo cancellati i multipli di un numero primo qualsiasi, sono primi tutti i numeri non cancellati, inferiori al quadrato del numero primo immediatamente superiore a quello. Per esempio, cancellati i multipli di 5, tutti i numeri rimanenti, inferiori a $7^2 = 49$ sono primi. Ed in vero, se un numero minore di 49 non fosse primo, esso dovrebbe essere divisibile per un numero primo minore di 7, cioè per 2, 3 o 5; ora i multipli di questi numeri sono tutti cancellati.

Risulta da ciò, che per sopprimere i multipli di 7 basterà cancellare di sette in sette i numeri della serie, incominciando dal 49 inclusivamente; per la stessa ragione, passando all'11, si cancelleranno di undici in undici, incominciando da $11^2 = 121$ inclusivamente; ecc.

Limitando la serie de' numeri naturali a 2000, si otterranno tutti i numeri primi in essa compresi, col cancellare solamente i multipli de' numeri primi inferiori a 47; giacchè 47^2 uguaglia 2209, mentre il numero primo immediatamente inferiore, che è 43, elevato al quadrato dà 1849, numero inferiore a 2000. I numeri primi inferiori a 2000, in numero di 304, formano la seguente tavola.

Tavola
di tutti i Numeri primi inferiori a 2000.

1	127	293	487	683	907	1109	1327	1571	1801
2	131	307	491	691	911	1117	1361	1579	1811
3	137	311	499	701	919	1123	1367	1583	1823
5	139	313	503	709	929	1129	1373	1597	1831
7	149	317	509	719	937	1151	1381	1601	1847
11	151	331	521	727	941	1153	1399	1607	1861
13	157	337	523	733	947	1163	1409	1609	1867
17	163	347	541	739	953	1171	1423	1613	1871
19	167	349	547	743	967	1181	1427	1619	1873
23	173	353	557	751	971	1187	1429	1621	1877
29	179	359	563	757	977	1193	1433	1627	1879
31	181	367	569	761	983	1201	1439	1637	1889
37	191	373	571	769	991	1213	1447	1657	1901
41	193	379	577	773	997	1217	1451	1663	1907
43	197	383	587	787	1009	1223	1453	1667	1913
47	199	389	593	797	1013	1229	1459	1669	1931
53	211	397	599	809	1019	1231	1471	1693	1933
59	223	401	601	811	1021	1237	1481	1697	1949
61	227	409	607	821	1031	1249	1483	1699	1951
67	229	419	613	823	1033	1259	1487	1709	1973
71	233	421	617	827	1039	1277	1489	1721	1979
73	239	431	619	829	1049	1279	1493	1723	1987
79	241	433	631	839	1051	1283	1499	1733	1993
83	251	439	641	853	1061	1289	1511	1741	1997
89	257	443	643	857	1063	1291	1523	1747	1999
97	263	449	647	859	1069	1297	1531	1753	
101	269	457	653	863	1087	1301	1543	1759	
103	271	461	659	877	1091	1303	1549	1777	
107	277	463	661	881	1093	1307	1553	1783	
109	281	467	673	883	1097	1319	1559	1787	
113	283	479	677	887	1103	1321	1567	1789	

235. — ***Teorema 4°.*** *Ogni numero* d *che divide il prodotto* ab *di due fattori, ed è primo con uno di essi* b, *divide l'altro* a.

Di fatti, poichè *b* e *d* sono primi tra loro, essi non hanno altro divisore comune che l'unità; perciò il loro massimo comun divisore è 1. Moltiplicando ora *b* e *d* per *a*, il massimo comun divisore dei prodotti *ab*, *ad* sarà $1 \times a$, ossia *a* (222); ma il numero *d* divide entrambi questi prodotti; dunque esso divide *a* (221).

236. — ***Teorema 5°.*** *Ogni numero primo* d *che divide un prodotto* abce *di più fattori, divide almeno uno di essi* a.

Invero, se il numero primo *d* non divide il fattore *e*, per es., esso è primo col medesimo; e poichè divide il prodotto *abce*, deve dividere l'altro fattore *abc* (n° ant.).

Per le stesse ragioni, d dividendo il prodotto abc, se non divide il fattore c, divide l'altro ab.

E finalmente, d dividendo ab, se non divide b divide a.

237. — ***Corollario 1°.*** *Ogni numero primo* d, *che divide una potenza* a^m *del numero* a, *divide* a.

In fatti, essendo $a^m = aaaa\ldots$, il numero primo che divide a^m deve dividere uno de' suoi fattori, ossia a.

238. — ***Corollario 2°.*** *Se due numeri* a *e* b *sono primi tra loro, tutte le loro potenze* a^m, b^n *sono prime tra loro.*

In vero, se le potenze a^m e b^n non fossero prime tra loro, ammetterebbero un divisore primo comune (229); e questo, dividendo a^m e b^n, dividerebbe a e b; il che è contro l'ipotesi.

239. — ***Corollario 3°.*** *Ogni numero primo* d, *che divide un prodotto* abce *di fattori primi, è uguale ad uno di essi* a.

In fatti, pel teorema antecedente, d dividendo il prodotto divide uno dei fattori, per es., a; ma essendo a primo per ipotesi, non può esser diviso che per se stesso; dunque $d = a$.

240. — ***Teorema 6°.*** *Se due prodotti di fattori primi sono uguali, si compongono de' medesimi fattori primi elevati rispettivamente alle stesse potenze.*

Siano i prodotti di fattori primi

$$(1) \qquad abcd = a'b'c'd'.$$

Il fattore a dividendo il primo membro dell'uguaglianza, divide pure il secondo; perciò esso è uguale ad uno de' fattori a', b',... (n° ant.); sia $a = a'$.

Si può dividere il primo membro dell'uguaglianza (1) per a, ed il secondo per a'; il che dà

$$(2) \qquad bcd = b'c'd'.$$

Ragionando sopra (2) come s'è fatto sopra (1), si ottiene l'uguaglianza di due altri fattori, cioè $b = b'$, e così di seguito.

Dunque, ciascuno de' fattori del primo prodotto trova il suo uguale nel secondo, cioè i due prodotti si compongono dei medesimi fattori, ciascuno di essi ripetuto lo stesso numero di volte, ossia elevato alla stessa potenza.

241. — ***Teorema 7°.*** *Se un numero* n *è primo coi fattori d'un prodotto* abc, *esso è primo col prodotto.*

In vero, se il numero n ed il prodotto abc, non fossero primi tra loro, essi avrebbero un fattore primo comune d (229); ma questo, dividendo il prodotto abc, dividerebbe uno de' fattori (236), per es., a; ed in tal caso a e n avrebbero un fattore comune d; il che è contro l'ipotesi.

242. — ***Teorema 8°.*** *Reciprocamente, se un numero* n *è primo con un prodotto* abc, *esso è primo co' fattori.*

In vero, supponiamo che n e a non siano primi tra loro; essi avranno un divisore comune d, il quale dividendo a dividerà il

suo multiplo *abc*. In tal caso il numero *n* ed il prodotto *abc* avrebbero un divisore comune *d*, il che è contro l'ipotesi.

243. — **Corollario.** *Se un numero primo* d *non divide un numero* a, *non dividerà neppure una potenza* a^m *di* a, *e reciprocamente.*

244. — **Teorema 9°.** *Se un numero* n *è divisibile per più altri numeri* a, b, c, *primi tra loro, esso è divisibile pel prodotto* abc *dei medesimi numeri.*

In fatti, poichè *n* è divisibile per *a*, chiamando *q* il quoto, si avrà

$$n = aq.$$

Il prodotto *aq* essendo uguale a *n*, è divisibile per *b*; ma *b* è primo con *a*; dunque esso divide *q* (235).

Chiamando q' il quoto di *q* per *b*, si avrà $q = bq'$; e sostituendo nell'uguaglianza precedente bq' a *q*, risulta

$$n = abq'.$$

Il prodotto abq' essendo uguale a *n* è divisibile per *c*; ma *c*, primo con *a* e con *b*, è primo col prodotto *ab* (241); dunque esso divide q' (235).

Chiamando q'' il quoto di q' per *c* si avrà $q' = cq''$; e sostituendo, risulta $n = abcq''$, ossia

$$n = abc \times q''.$$

Quest'uguaglianza mostra che dividendo *n* per *abc* si otterrebbe per quoto q''; ora q'' è un numero intero, poichè q' era divisibile per *c*; dunque *n* è divisibile per *abc*.

Osservazione. — Da questo teorema si deducono i caratteri di divisibilità de' numeri che sono il prodotto di fattori primi tra loro (V. n° 208). Così per esempio, un numero divisibile per 3 e per 7 sarà divisibile per 21; similmente il numero 23595, che ha i caratteri di divisibilità per 3, 5 e 11, sarà divisibile per $3 \times 5 \times 11 = 165$.

245. — **Teorema 10°.** *Ogni numero non primo è un prodotto di fattori primi.*

Sia *n* un numero non primo; dico che esso è un prodotto di fattori primi. In fatti,

Il numero *n* non essendo primo, ammette almeno un divisore primo *a* (229); onde si ha, chiamando *q* il quoto,

$$n = aq.$$

Se *q* è primo, il teorema è dimostrato; *n* è il prodotto di due fattori primi.

Se *q* non è primo, esso ammette almeno un divisore primo *b*; onde chiamando q' il nuovo quoto, si ha $q = bq'$; e sostituendo nell'uguaglianza precedente, risulta

$$n = abq'.$$

Se q' è primo, il teorema è dimostrato; *n* è il prodotto di tre fattori primi.

Se q' non è primo, esso ammette un divisore primo c, e si ha $q' = cq''$; ovvero, sostituendo,

$$n = abcq''.$$

Se q'' è primo, il teorema è dimostrato; n è il prodotto di quattro fattori primi. Se q'' non è primo, si continua lo stesso ragionamento. I quoti successivi $q\ q'\ q''$,... essendo interi e decrescenti, hanno un limite; perciò l'ultimo è un numero primo. Dunque ogni numero non primo è il prodotto di fattori primi.

Alcuni di tali fattori potendo essere uguali, il numero n prenderà la forma generale

$$n = a^p b^q c^r d^s \ldots,$$

come si vedrà nell'esempio qui sotto.

246. — ***Scomposizione di un numero in fattori primi.*** Poichè un numero non primo è un prodotto di fattori primi (n° ant.), ogni numero non primo può risolversi in fattori primi.

247. — Per risolvere un numero in fattori primi, bisogna dividerlo pel più piccolo numero primo che esattamente il divida; quindi fare lo stesso sopra il quoto ottenuto, poi sopra il secondo quoto, ecc....., finchè risulti un quoto uguale a 1. Tutti i divisori saranno i fattori primi, il cui prodotto sarà uguale al numero proposto.

Applicando questa regola al numero 360, si ha

360:2=180; 180:2=90; 90:2=45; 45:3=15; 15:3=5; 5:5=1.

I numeri 2, 2, 2, 3, 3, 5 sono dunque i fattori primi di 360.

Ed in vero, le precedenti uguaglianze danno queste altre

$360 = 180.2$; $180 = 90.2$; $90 = 45.2$; $45 = 15.3$; $15 = 5.3$;

le quali, moltiplicate membro a membro, producono

$$360.180.90.45.15. = 180.2.90{:}2.45,2.15.3.5.3.$$

Ora, i numeri 180, 90, 45 e 15, essendo fattori comuni ai due membri, si possono sopprimere; onde risulta $360 = 2.2.2.3.3.5$, ossia

$$360 = 2^3.3^2.5.$$

In pratica l'operazione si dispone come qui contro; ponendo cioè i dividendi a sinistra, e i divisori a destra d'una linea verticale.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

248. — ***Osservazione 1ª.*** Se nelle successive divisioni si giunge ad un dividendo che non sia divisibile per nessuno de' numeri primi che danno un quoto maggiore di sè, si conchiuderà, senza andar più oltre, che questo dividendo è un numero primo (231).

Così, nello scomporre il numero 11994, dopo una divisione per 2 ed una per 3, si giunge a dover dividere 1999, che si ri-

conosce essere numero primo; perciò la scomposizione è finita, e si ha $11994 = 2.3.1999$.

249. — ***Osservazione 2ª***. Allorchè il numero da risolversi in fattori primi è evidentemente il prodotto di due fattori, riesce più semplice il risolvere ciascun d'essi in fattori primi, e formare un solo prodotto de' risultati.

Per esempio, vogliasi risolvere il numero 480; si scriverà

$$480 = 48 \times 10 = 6 \times 8 \times 5 \times 2 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2 = 2^5.3.5.$$

250. — ***Osservazione 3ª***. *Un medesimo numero non ammette che un solo sistema di fattori primi.*

In fatti, se un numero n ammettesse due sistemi di fattori primi $a, b, c, d,$ e $a', b', c', d',$ vi sarebbero due prodotti, $abcd$ e $a'b'c'd'$, di fattori primi differenti, uguali al medesimo numero n, e perciò uguali tra loro, il che non può essere (240).

251. — ***Condizione richiesta perchè due numeri siano divisibili l'uno per l'altro.*** *Affinchè due numeri siano divisibili l'uno per l'altro, è* necessario *e* sufficiente *che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore elevati ad una potenza di grado almeno uguale.*

1° *È necessario.* In fatti, il dividendo essendo il prodotto del divisore pel quoto, esso consta (169) del prodotto di tutti i fattori del divisore e del quoto; e perciò esso contiene tutti i fattori primi del divisore, ciascuno tante volte almeno, quante è contenuto nel divisore; cioè ciascuno elevato ad una potenza di grado almeno uguale a quella che lo stesso fattore ha nel divisore.

2° *È sufficiente.* In fatti, quando tale condizione è adempita, il dividendo può risolversi nel prodotto di due fattori, di cui uno contiene tutti i fattori primi del divisore, e l'altro i fattori rimanenti, il cui prodotto costituisce il quoto, che evidentemente è intero.

Esempio. $720 = 2^4.3^2.5$ e $36 = 2^2.3^2$; dunque 720 è divisibile per 36 ed il quoto è $2^2.5$, perchè con questi fattori e con quelli del divisore si forma il prodotto $2^2.5.2^2.3^2 = 2^4.4^2.5$, che è il dividendo.

Ma essendo $360 = 2^3.3^2.5$ e $108 = 2^2.3^3$, non sarà 360 divisibile per 108.

252. — ***Osservazione.*** Segue da ciò che quando la divisione di un numero per un altro non deve lasciar alcun residuo, la si può effettuare nel seguente modo:

Si risolvono i due numeri ne' loro fattori primi, poi si sopprimono in entrambi tutti i fattori comuni; il prodotto de' fattori rimasti nel dividendo costituisce il quoto.

Esempio: $\dfrac{1524600}{1386} = \dfrac{2^3.3^2.5^2.7.11^2}{2.3^2.7.11} = 2^2.5^2.11 = 1100.$

253. ***Ricerca di tutti i divisori d'un numero.*** La scomposizione d'un numero in fattori primi fornisce il mezzo di trovare tutti i divisori del medesimo. Proponiamoci di formare tutti i divisori di 5400.

Risolvendo il numero proposto in fattori primi, si ottiene $5400 = 2^3.3^3.5^2$; dunque:

$$(a)\quad \begin{cases} 1, 2, 2^2, 2^3 \\ 1, 3, 3^2, 3^3 \\ 1, 5, 5^2. \end{cases}$$

1° 5400 è divisibile per tutti i numeri componenti il quadro (*a*) (251).

2° I numeri della 1ª linea orizzontale essendo primi con quei della 2ª (238), il numero 5400 sarà divisibile per i sedici prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuno di quelli per ciascuno di questi (244). Questi prodotti sono i seguenti:

$$(b)\quad \begin{cases} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 2.3 & 2^2.3 & 2^3.3 \\ 3^2 & 2.3^2 & 2^2.3^2 & 2^3.3^2 \\ 3^3 & 2.3^3 & 2^2.3^3 & 2^3.3^3 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 & 24 \\ 9 & 18 & 36 & 72 \\ 27 & 54 & 108 & 216. \end{cases}$$

3° Ciascuno di questi prodotti essendo primo coi numeri della 3ª linea orizzontale del quadro (*a*) (238), se si moltiplica ciascuno di essi per ciascuno dei detti numeri, si otterranno quarantotto prodotti, i quali tutti divideranno (244) il numero 5400.

Di questi quarantotto prodotti i sedici primi sono quegli stessi che compongono il quadro (*b*); poichè moltiplicando questi pel primo numero 1 della 3ª linea di (*a*), essi non cambiano. Gli altri poi, che si ottengono moltiplicando quei di (*b*) per 5 e quindi per 5^2, sono i seguenti:

$$(c)\quad \begin{cases} 5 & 2.5 & 2^2.5 & 2^3.5 \\ 3.5 & 2.3.5 & 2^2.3.5 & 2^3.3.5 \\ 3^2.5 & 2.3^2.5 & 2^2.3^2.5 & 2^3.3^2.5 \\ 3^3.5 & 2.3^3.5 & 2^2.3^3.5 & 2^3.3^3.5 \\ 5^2 & 2.5^2 & 2^2.5^2 & 2^3.5^2 \\ 3.5^2 & 2.3.5^2 & 2^2.3.5^2 & 2^3.3.5^2 \\ 3^2.5^2 & 2.3^2.5^2 & 2^2.3^2.5^2 & 2^3.3^2.5^2 \\ 3^3.5^2 & 2.3^3.5^2 & 2^2.3^3.5^2 & 2^3.3^3.5^2 \end{cases} = \begin{cases} 5 & 10 & 20 & 40 \\ 15 & 30 & 60 & 120 \\ 45 & 90 & 180 & 360 \\ 135 & 270 & 540 & 1080 \\ 25 & 50 & 100 & 200 \\ 75 & 150 & 300 & 600 \\ 225 & 450 & 900 & 1800 \\ 675 & 1350 & 2700 & 5400. \end{cases}$$

Il numero 5400 non ammette altri divisori fuori di quelli compresi nei quadri (*b*) e (*c*) (251); perchè questi due quadri comprendono tutti i prodotti che si possono formare coi fattori primi di questo numero, elevati a potenze non più alte di quelle che essi hanno nel numero stesso.

254. — Da tutto ciò risulta la seguente

Regola. — *Per formare tutti i divisori d'un numero, lo si risolve in fattori primi, e si forma una tavola* (quad. *a*) *composta di una serie di linee orizzontali comincianti tutte per l'unità, e contenenti le diverse potenze di ciascuno di questi fattori primi, comprese nel numero proposto. Quindi si moltiplicano tutti i numeri della prima linea per ciascuno di quelli della seconda poi tutti questi prodotti per ciascun numero della terza linea, e così via via.*

Gli ultimi prodotti ottenuti moltiplicando pei numeri dell'ultima linea della tavola, sono tutti i divisori cercati(*).

255. — ***Numeri dei divisori d'un numero.*** Dopo di aver risolto un numero in fattori primi, si può facilmente sapere quanti divisori ammetta, senza realmente formarli.

Ripigliamo il numero 5400.

Ciascuna linea del quadro (*a*) contiene tanti termini più uno quante unità contiene l'esponente del fattore componente essa linea. Dunque moltiplicando, giusta la precedente regola, i termini della prima linea per ciascuno di quelli della seconda, si ottengono (3+1) (3+1) prodotti differenti; quindi moltiplicando questi prodotti per ciascun termine della terza linea, si hanno (3+1) (3+1) (2+1) prodotti. Ma questi sono tutti i divisori di 5400; quindi il numero di questi divisori è

(3+1) (3+1) (2+1)=4.4.3=48. Dunque:

Il numero totale dei divisori di un numero si ottiene aggiungendo un'unità a ciascuno degli esponenti de' suoi fattori primi, e formando il prodotto de' numeri risultanti.

256. — ***Composizione del massimo comun divisore di più numeri.*** Venga proposto di comporre il massimo comun divisore de' numeri 504, 8316, 30492.

Scomponendoli in fattori primi, si ottiene:

$$504=2^3.3^2.7,\ 8316=2^2.3^3.7.11,\ 30492=2^2.3^2.7.11^2.$$

Ciò posto, affinchè il numero cercato sia divisore *comune* ai tre numeri dati, esso non deve contenere (251) che i fattori primi comuni ai medesimi, cioè 2, 3, 7. Ed affinchè sia divisore *massimo*, deve contenere ciascuno di questi tre fattori col minimo esponente che esso ha ne' numeri dati. Questo numero è dunque $2^2.3^2.7=252$. dunque:

Regola. — *Per cercare il massimo comun divisore di più numeri, si risolvono in fattori primi, quindi si forma il prodotto di tutti quelli che sono comuni ai numeri proposti, ciascuno col minore esponente che ha negli stessi numeri. Questo prodotto è il massimo comun divisore richiesto.*

257. — ***Osservazione 1ª.*** Se nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri (220) si ha per ultimo resto 1, i due numeri sono primi tra loro.

(*) Dopo formati tutti i divisori d'un numero si scrivano sopra due linee orizzontali, nella prima in ordine ascendente e nella seconda in ordine inverso, per modo che il maggiore si trovi sotto il minore, ecc.; il prodotto di qualsivoglia numero d'una linea pel suo corrispondente nell'altra, sarà il numero stesso di cui questi sono i divisori. *Esempio:*

Divisori di 5400									
serie ascendente	1	2	3	4	5	6	8	9	10.....
serie discendente	5400	2700	1800	1350	1080	900	675	600	540.....
prodotti	5400	5400	5400	5400	5400	5400	5400	5400	5400.....

258. — ***Osservazione 2ª.*** Il massimo comun divisore di due numeri non si altera, moltiplicando o dividendo uno di essi per un fattore primo coll'altro; poichè con ciò nè s' introduce, nè si sopprime alcun fattore primo comune ai due numeri dati.

Se adunque nel cercare il massimo comun divisore di due numeri dati secondo la regola (220), si scorgono in un resto dei fattori primi col resto successivo, questi fattori si potranno sopprimere.

259. — ***Composizione del minimo multiplo comune a più numeri.*** Chiamasi multiplo comune a più numeri un numero divisibile per ciascuno di essi.

Così 5400 è il multiplo comune a tutti i suoi 48 divisori (253).

I multipli comuni a più numeri sono infiniti; per es. i 48 divisori di 5400 hanno per multipli comuni tutti i multipli di 5400.

260. — Il più piccolo tra i multipli comuni a più numeri dicesi il loro **minimo multiplo.**

Venga proposto di trovare il minimo multiplo comune ai tre numeri $504=2^3.3^2.7$, $8316=2^2.3^3.7.11$, $30492=2^2.3^2.7.11^2$, dei quali abbiamo già trovato il massimo comun divisore (256).

Affinchè il numero cercato sia *divisibile* pei tre numeri dati, esso deve contenere (251) tutti i fattori primi contenuti nei medesimi, ciascuno con un esponente almeno uguale al maggiore che esso ha ne' numeri dati; cioè 2^3, 3^3, 7 e 11^2.

Ed affinchè esso sia il *minimo* numero divisibile per i numeri dati, non deve contenere altri fattori primi fuori di questi, nè questi con esponenti maggiori.

Questo numero è dunque $2^3.3^3.7.11^2=182952$. Dunque:

Regola. —(*Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri, si risolvono in fattori primi, e si forma il prodotto di tutti questi fattori, ciascuno col maggior esponente che ha nei numeri dati.*)

261. — ***Osservazione.*** Se più numeri sono primi tra loro, il minimo multiplo ad essi comune è uguale al loro prodotto; giacchè in tal caso esso componesi di tutti i fattori contenuti ne' numeri dati.

262. — ***Altro modo di cercare il minimo multiplo comune a più numeri.*** Allorchè i numeri dati sono tali che difficilmente si possono risolvere in fattori primi, riesce più comodo cercarne il minimo multiplo con un altro metodo, che esponiamo, prima pel caso di due numeri, poi pel caso di più di due numeri.

263. — ***Teorema 1°.*** *Il prodotto di due numeri* m *e* n *è uguale al prodotto del massimo divisore* D, *e del minimo multiplo* M, *comune ai due numeri.*

In fatti, siano a, b, c, d, numeri primi, e supponiamo che si abbia

$$m=a^4c^2d, \quad n=a^3bc^2d^2;$$

si avrà (256. 260) $D=a^3c^2d$, $M=a^4bc^2d^2$.

Queste quattro uguaglianze mostrano che a comporre i due numeri D e M entrano i medesimi fattori componenti i numeri dati m e n; dunque i prodotti DM e mn, che constano di tutti questi fattori (169), sono uguali.

264. — Poichè si ha $DM=mn$, dividendo ambi i membri per D, risulta

$$M=\frac{mn}{D};$$

dalla quale uguaglianza si deduce la seguente

Regola. — *Per trovare il minimo multiplo comune a due numeri, si moltiplicano questi numeri tra loro, e si divide il prodotto pel loro massimo comun divisore.*

Sia da cercare il minimo multiplo comune a 1014 e 1404, il cui massimo comun divisore è 78.

Si avrà $M=\frac{1014\times1404}{78}=\frac{169\times1404}{13}=13\times1404=18252.$

265. — **Teorema 2°.** *Il minimo multiplo comune a più di due numeri* a, b, c, d, *è quello stesso comune al minimo multiplo di due fra essi ed ai rimanenti numeri.*

Sia M il minimo multiplo di a e b, p. es.; dico che il minimo multiplo di a, b, c, d, sarà quello di M, c, d. In fatti,

1° Se un numero è multiplo de' quattro numeri a, b, c, d, essendo esso multiplo di a e b, è multiplo altresì di M, che è il minimo fra i multipli di a e b.

2° Se un numero è multiplo de' tre numeri M, c, d, essendo esso multiplo di M, è multiplo altresì di a e b, che sono divisori di M.

Per conseguenza *tutti* i multipli comuni ad a, b, c, d, sono pure comuni a M, c, d; e reciprocamente, tutti i multipli comuni ad M, c, d, sono altresì comuni ad a, b, c, d. Dunque il minimo multiplo di a, b, c, d, sarà pure il minimo multiplo di M, c, d.

266. — Da questo teorema, che ha molta analogia con quello relativo al massimo comun divisore (224), s'inferisce una regola analoga a quella ivi dedotta; cioè:

Regola. — *Per trovare il minimo multiplo comune a più di due numeri, si cerca il minimo multiplo comune a due fra essi; poi il minimo multiplo comune al numero trovato e ad un terzo de' numeri dati; e così di seguito, finchè siasi operato sopra tutti i numeri dati; l'ultimo minimo multiplo ottenuto sarà il richiesto.*

Venga proposto di cercare il minimo multiplo comune ai quattro numeri 36, 54, 60 e 210.

Il minimo multiplo com. a 36 e 54 è (264) $36 \times 54 : 18 = 108$,
» » 108 e 60 » $108 \times 60 : 12 = 540$,
» » 540 e 210 » $540 \times 210 : 30 = 3780$.

Dunque il minimo multiplo dei quattro numeri proposti è 3780.

Esercizi sui numeri primi.

102. Tra i numeri: 4171; 3977; 2003; 3649; 2007; 2049; 2081; 2209; 1517; 2099, cerchisi quali siano primi.

103. Si cerchino tutti i divisori di ciascuno dei seguenti numeri: 68; 148; 936; 4260; 581; 1200; 2000.

104. Si calcoli quanti divisori ammetta ciascuno dei seguenti numeri: 1389150; 3704400; 13395375.

105. Compongasi un numero che ammetta 36 divisori.

106. In quanti modi un esercito di 9360 uomini può venir disposto in file d'ugual numero?

107. Si cerchi il minimo multiplo comune: 1° a 36; 96; 112. 2° a 15; 25; 49; 35. 3° a 99; 66; 462; 539; 1089. 4° a 325; 525; 169; 1014.

108. Gli alunni d'un collegio volendo fare un viaggio autunnale, il professore propone loro di calcolare la somma occorrente, sapendo che il numero degli individui e quello delle lire che ciascuno dovrà spendere hanno per massimo comun divisore 6, e per minimo multiplo 480. Si risponda alla domanda del professore (*).

Teoremi da dimostrare.

109. Il quadrato d'un numero primo con 2 e 3 è un multiplo di 24, più 1.

110. Il quadrato d'un numero primo con 5 è un multiplo di 5, più o meno 1.

111. Se due numeri a e b sono primi con 2 e 3, la somma a^2+b^2 dei loro quadrati è divisibile per 2, la differenza a^2-b^2 per 24, ed il prodotto $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ per 48.

112. Se due numeri a e b sono primi con 5, il prodotto $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ è divisibile per 5.

113. Se due numeri a e b sono primi con 2, 3 e 5, il prodotto $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ è sempre divisibile per 240.

114. Il prodotto di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 6, e quello di quattro, per 24.

115. Il prodotto di n numeri consecutivi è sempre divisibile pel prodotto 1.2.3.4..... n degli n primi numeri.

(*) Vedi in oltre i problemi 309 e 1000.

CAPO IV.

TEORICA DELLE FRAZIONI

§ 1° — FRAZIONI IN GENERALE.

267. — Abbiamo detto (5) *essere la frazione una parte dell'unità.* Secondo questa definizione chiamerebbesi *frazione*, p. e., ciascuno dei pezzi d'una lastra di vetro che per accidente si fosse rotta; ma la frazione così intesa non può essere oggetto dell'aritmetica; poichè non avendo un determinato rapporto coll'unità di cui è parte (la lastra), essa non è un numero (4).

Affinchè la frazione sia un numero, e diventi quindi oggetto dell'aritmetica, bisogna *determinare* che cosa sia essa rispetto all'unità. Ora ciò si fa considerando l'unità divisa in un certo numero di parti uguali, e prendendo poi qualsivoglia numero di queste parti. Dunque:

268. — La **frazione** è una o più parti dell'unità divisa in parti uguali.

Per esempio, se si taglia una lastra di vetro in 5 parti uguali, poi si prende una o più di queste parti, si avrà una frazione della lastra.

269. — Risulta da ciò, che il valore d'una frazione dipende da due numeri; giacchè due cose deve essa indicare per essere determinata, cioè: in quante parti è stata divisa l'unità, e quante si prendono di queste parti.

270. — Il numero che indica in quante parti venne divisa l'unità si chiama **denominatore,** e quello indicante quante parti si prendono dicesi **numeratore.**

Così stando al sovraccennato esempio, se si prendono 3 parti della lastra divisa in 5, il numero 5 è il denominatore, perchè effettivamente *denomina*, cioè dà il nome alle parti; ed il 3 si chiama numeratore, perchè *numera* ovvero indica il numero delle parti contenute nella frazione.

271. — ***Modo di scrivere e di leggere una frazione.*** *Per iscrivere una frazione si pone da prima il numeratore, poscia il denominatore sotto, separandoli con un tratto orizzontale od obliquo.*

Per leggerla si enuncia il numeratore quale si trova, poi il denominatore, dandogli la desinenza in esimo.

Esempio. Se l'unità è divisa in 12 parti, e se ne prendono 7, la frazione che rappresenta il complesso di queste parti avrà per numeratore 7, e per denominatore 12. Essa si scrive

$$\frac{7}{12}, \text{ ovv. } {}^{7}/_{12},$$

e si legge *sette dodicesimi.*

Osservazione. — Quando il denominatore è uno de'numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, esso non prende la desinenza in *esimo*, ma leggesi *mezzo, terzo, quarto, quinto, sesto, settimo, ottavo, nono, decimo.* Onde le frazioni ${}^{1}/_{2}$, ${}^{7}/_{9}$, ${}^{3}/_{7}$, si leggeranno *un mezzo, sette noni, tre settimi.*

272. — Si distinguono due sorta di frazioni, cioè: **frazioni decimali** e **frazioni ordinarie.**

La frazione chiamasi *decimale* quando l'unità è divisa in 10, 100, 1000, ecc., parti uguali; e si dice *ordinaria* quando l'unità è divisa in *qualsivoglia* numero di parti uguali.

§ 2° — FRAZIONI ORDINARIE.

273. — Quantunque le frazioni siano per natura minori dell'unità, tuttavia le operazioni che si fanno su di esse conducono sovente a risultati uguali o maggiori dell'unità. Ora:

Si chiama **frazione propria** quella che è minore dell'unità, e **frazione impropria** od **espressione frazionaria** qualunque altra.

È chiaro che una frazione è minore, uguale o maggiore dell'unità, secondo che il numeratore è minore, uguale o maggiore del denominatore (170). Quindi sono frazioni proprie: ${}^{1}/_{3}$, ${}^{5}/_{7}$, ${}^{9}/_{13}$; e frazioni improprie: ${}^{9}/_{6}$, ${}^{18}/_{12}$, ${}^{15}/_{13}$, ${}^{6}/_{6}$.

La frazione che manca ad un'altra per essere uguale all'unità dicesi **complementaria** di quest'altra.

Così la frazione ${}^{5}/_{8}$ è complementaria di ${}^{3}/_{8}$; perchè

$${}^{3}/_{8}+{}^{5}/_{8}={}^{8}/_{8}=1.$$

Proprietà delle frazioni.

274. — Consideriamo due frazioni ${}^{3}/_{7}$ e ${}^{5}/_{8}$. La prima rappresenta 3 parti di cui ciascuna è 7 volte più piccola dell'unità; similmente la seconda rappresenta 5 parti, ciascuna 8 volte minore dell'unità.

Il denominatore adunque altro uffizio non fa nella frazione che dinotare la grandezza delle parti rappresentate dal numeratore.

Ora siccome ognuna di queste parti può considerarsi come una nuova unità (giacchè si può prendere per unità una quantità qualsiasi), così il numeratore può considerarsi, non altrimenti che negl'interi, come un complesso di unità, tanto più piccole quanto più il denominatore è grande.

275. — **Corollario 1°.** *Quando più frazioni hanno lo stesso denominatore, i numeratori rappresentano parti dell'unità aventi la medesima grandezza. Quando invece più frazioni hanno denominatori differenti, i numeratori rappresentano parti di grandezze disuguali; e perciò si devono considerare come numeri eterogenei* (6).

276. — **Corollario 2°.** *Di più frazioni aventi lo stesso denominatore, la maggiore è quella che ha il numeratore maggiore.*

Di più frazioni aventi lo stesso numeratore, la maggiore è quella che ha il denominatore minore.

Quindi risultano i seguenti teoremi.

277. — **Teorema 1°.** *Se, senza alterare il denominatore, si moltiplica o si divide il numeratore per un numero intero, la frazione resta moltiplicata o divisa per tal numero.*

In vero, poichè il denominatore non cambia, le parti dell'unità componenti il numeratore conservano lo stesso valore; se dunque se ne prendono 2, 3, 4,... volte più, il risultato sarà 2, 3, 4,.... volte maggiore; e se per contrario se ne prendono 2, 3, 4,... volte meno, il risultato sarà 2, 3, 4,... volte minore.

278. — **Teorema 2°.** *Se senza alterare il numeratore, si moltiplica o si divide il denominatore per un numero intero, la frazione resta divisa o moltiplicata per lo stesso numero.*

Di fatti, poichè il numeratore non cambia, il numero delle parti che si prendono rimane lo stesso. Ora se il denominatore si moltiplica per 2, 3, 4,... ciascuna parte diventa 2, 3, 4,... volte minore; onde il complesso di esse, ossia la frazione, sarà 2, 3, 4,... volte più piccola. Se per contrario il denominatore si divide per 2, 3, 4,..., ciascuna parte diventa 2, 3, 4,... volte maggiore; onde il complesso di esse, ossia la frazione, sarà 2, 3, 4,... volte maggiore.

279. — **Corollario.** *Se si moltiplicano o si dividono i due termini d'una frazione per un medesimo numero, il valore della frazione non cambia.*

280. — **Teorema 3°.** *Il valore d'una frazione si altera quando si aggiunge o si toglie dai due termini un medesimo numero.*

Se la frazione è propria, aggiungendo ai due termini uno stesso numero, essa aumenta; sottraendolo essa diminuisce.

Se la frazione è impropria, viene l'opposto.

In fatti, sia la frazione propria $^3/_5$. La sua complementaria è $^2/_5$; perciò si ha (273)

$$^3/_5 + ^2/_5 = 1.$$

Ora, aggiungendo, p. es,, 4 ad ambi i termini della frazione $^3/_5$, si ottiene $^7/_9$, la cui complementaria è $^2/_9$; perciò si ha pure

$$^7/_9 + ^2/_9 = 1.$$

Queste due uguaglianze danno (54)

$$^3/_5 + ^2/_5 = ^7/_9 + ^2/_9$$

ma $^2/_5$ è maggiore (276) di $^2/_9$; se adunque nell'uguaglianza precedente si sopprimono queste frazioni, il primo membro diventerà minore del secondo, perchè si sarà tolta una quantità maggiore. Risulta dunque $^3/_5 < ^7/_9$, ossia

$$\frac{3+4}{5+4} > \frac{3}{5}.$$

Dunque una frazione propria aumenta di valore quando si aggiunge ai due termini un medesimo numero.

Nello stesso modo si dimostrerebbero gli altri tre punti del teorema.

281. — ***Osservazione.*** Le espressioni frazionarie uguali all'unità come $^3/_3$, $^8/_8$, ecc., non sono comprese nel precedente teorema; perchè a parlare propriamente, esse non sono nè frazioni proprie, nè frazioni improprie; ma sì bene il punto di transizione da quelle a queste. Quindi è che tali espressioni nè aumentano, nè diminuiscono quando si aggiunge o si toglie un medesimo numero da ciascun termine.

282. — ***Teorema 4°.*** *Il valore di una frazione è uguale al quoto d'una divisione, nella quale il numeratore sia il dividendo, ed il denominatore il divisore.*

In vero, sia la frazione $^{19}/_5$. Ciascuna delle 19 parti rappresentate dal numeratore essendo cinque volte minore dell'unità (274), il complesso di queste parti, ossia la frazione, sarà 5 volte minore di 19 unità; il che vuol dire che $^{19}/_5$ è la quinta parte di 19. Ma la quinta parte di 19 si ottiene dividendo 19 per 5; dunque la frazione $^{19}/_5$ dinota il quoto di 19 diviso per 5.

283. — ***Corollario.*** *Per moltiplicare una frazione pel suo denominatore, basta sopprimere questo denominatore.*

In fatti, la frazione $^{19}/_5$ essendo 5 volte minore di 19, moltiplicandola per 5, essa diventerà 19. Dunque $^{19}/_5 \times 5 = 19$.

284. — Si deduce dal precedente teorema il modo di ottenere il quoto esatto d'una divisione, nel caso in cui si abbia un resto.

Debbasi dividere 75 per 8.

Effettuando la divisione si ha per quoto intero 9 e per resto 3. Per avere il quoto esatto bisognerebbe (118) dividere il resto 3 per 8 ed aggiungere il quoziente alla parte intera 9. Ora, il quoziente di 3 per 8 è indicato (282) dalla frazione $^3/_8$; dunque il quoziente esatto di 75 per 8 e $9 + ^3/_8$. Da ciò s'inferisce la seguente

Regola. — *Per avere il quoto esatto d'una divisione che dà un resto, bisogna aggiungere alla parte intera del quoto una frazione che abbia per numeratore il resto della divisione, e per denominatore il divisore.*

§ 3° — RIDUZIONI DELLE FRAZIONI.

285. — Le operazioni che si eseguiscono sulle frazioni sono di due sorta. Le une, in numero di quattro, *addizione*, *sottrazione*, *moltiplicazione* e *divisione*, sono loro comuni coi numeri interi; le altre, che servono di preparazione alle precedenti, sono proprie delle frazioni e sogliono chiamarsi *riduzioni*.

286. — Si chiamano **riduzioni** delle frazioni diverse trasformazioni che si fanno loro subire senza che perciò cangino valore.

287. — Si possono distinguere tre specie di riduzioni:

1° Riduzione delle frazioni a' minimi termini.

2° Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

3° Riduzione delle frazioni improprie in interi, e reciprocamente, degl'interi sotto forma di frazione.

288. — ***Riduzione delle frazioni a' minimi termini.*** La riduzione delle frazioni a' minimi termini, ossia alla loro più semplice espressione, consiste nel trasformare una frazione in altra equivalente, i cui termini siano i più piccoli possibili.

289. — Sia la frazione $^{126}/_{168}$.

Se si dividono i due termini per un medesimo numero, essa non cambia valore (279). Ora i termini 126 e 168 sono entrambi divisibili per 2, 3 e 7; effettuando queste divisioni, si ottengono successivamente le frazioni $^{63}/_{84}$, $^{21}/_{28}$, $^{3}/_{4}$.

I termini della frazione $^{3}/_{4}$ essendo primi tra loro, non si possono più dividere per un medesimo numero; perciò la frazione non può esprimersi con termini più piccoli. Dunque:

290. — Una frazione è ridotta a' minimi termini quando questi termini sono primi tra loro; ed allora essa dicesi **irreduttibile.**

Ora due numeri diventano primi tra loro quando si dividono entrambi pel loro massimo comun divisore (223); perciò la frazione $^{126}/_{168}$ poteva ridursi a' minimi termini mediante una sola divisione, dividendo cioè i due termini pel loro massimo comun divisore 42; il che dà di fatti $^{3}/_{4}$.

291. — Dal sin qui esposto s'inferisce la seguente

Regola. — *Per ridurre una frazione a' minimi termini vi sono due metodi:*

1° *Se scorgesi che i due termini abbiano i caratteri di divisibilità per* 2, 3, 4, 5,. . ., *si dividono entrambi successivamente per tali numeri finchè si può.*

2° *Si cerca il massimo comun divisore de' suoi due termini* (220, 256), *e si dividono entrambi per questo.*

Osservazione. — Esiste un'infinità di frazioni uguali ad una frazione data. Tutte queste frazioni si ottengono riducendo la frazione data a' minimi termini, poi moltiplicando questi successivamente per tutti i numeri della serie naturale 2, 3, 4, 5, 6,. . .

292. — ***Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore.*** La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore consiste nel trasformare due o più frazioni di diverso denominatore in altrettante frazioni, uguali rispettivamente alle prime ed aventi uno stesso denominatore.

293. — Consideriamo da prima due frazioni $^3/_4$ e $^5/_7$.

Per trasformare queste frazioni in altre equivalenti, basta moltiplicare i due termini di ciascuna per un medesimo numero; ma perchè le frazioni risultanti abbiano denominatori uguali bisogna che questi denominatori siano prodotti di medesimi fattori. Ora, questo doppio scopo si raggiunge col moltiplicare i due termini di ciascuna delle frazioni date pel denominatore dell'altra; come abbastanza vien dimostrato dalle seguenti uguaglianze:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 7}{4\times 7}=\frac{21}{28},\qquad \frac{5}{7}=\frac{5\times 4}{7\times 4}=\frac{20}{28}.$$

Le frazioni $^{21}/_{28}$ e $^{20}/_{28}$ sono rispettivamente uguali a $^3/_4$ e $^5/_7$, ed hanno lo stesso denominatore.

294. — Siano ora le quattro frazioni $^2/_3$, $^5/_7$, $^8/_{11}$ e $^7/_8$.

Ove si richiedesse solo di trasformare queste frazioni in altre equivalenti basterebbe moltiplicare i due termini di ciascuna per uno stesso numero; ma le nuove frazioni debbono avere inoltre lo stesso denominatore, la qual cosa richiede che questi denominatori siano prodotti di medesimi fattori. Ora, questo doppio scopo si ottiene col moltiplicare i due termini di ciascuna delle frazioni date pel prodotto de' denominatori delle altre. Ciò si vede chiaro nelle uguaglianze seguenti:

$$\frac{2}{3}=\frac{2.7.11.8}{3.7.11.8},\quad \frac{5}{7}=\frac{5.3.11.8}{7.3.11.8},\quad \frac{8}{11}=\frac{8.3.7.8}{11.3.7.8},\quad \frac{7}{8}=\frac{7.3.7.11}{8.3.7.11}$$

ovvero effettuando le moltiplicazioni,

$$\frac{2}{3}=\frac{1232}{1848},\quad \frac{5}{7}=\frac{1320}{1848},\quad \frac{8}{11}=\frac{1344}{1848},\quad \frac{7}{8}=\frac{1617}{1848}.$$

295. — Da quanto precede si deduce la seguente

Regola. — *Per ridurre più frazioni allo stesso denominatore, se le frazioni date sono due, si moltiplicano i due termini di ciascuna pel denominatore dell'altra; se sono più di due, si moltiplicano i due termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre.* (*L'operazione si può disporre come qui accanto*).

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & \times 7 & \times 11 & \times\ 8 & = 1232 \\ \hline 3 & \times 7 & \times 11 & \times\ 8 & = 1848 \\ 5 & \times 3 & \times 11 & \times\ 8 & = 1320 \\ \hline 7 & \times 3 & \times 11 & \times\ 8 & = 1848 \\ 8 & \times 3 & \times\ 7 & \times\ 8 & = 1344 \\ \hline 11 & \times 3 & \times\ 7 & \times\ 8 & = 1848 \\ 7 & \times 3 & \times\ 7 & \times 11 & = 1617 \\ \hline 8 & \times 3 & \times\ 7 & \times 11 & = 1848 \end{array}$$

296. — ***Minimo denominatore comune a più frazioni.*** Secondo la precedente regola, il denominatore comune riesce per lo più un numero assai grande, essendo esso il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni date. Ora in molti casi si possono trovare denominatori comuni più piccoli; il minore fra questi dicesi *minimo comun denominatore.*

297. — Consideriamo da prima le frazioni $^2/_3$, $^5/_6$, $^{11}/_{12}$ e $^{13}/_{24}$, nelle quali il denominatore 24 è multiplo di tutti gli altri.

Operando giusta la regola generale, si otterrebbe per denominatore comune 5184; ma vi è modo di far sì che il denominatore comune sia 24. Ed in vero, poichè il 24 è multiplo di tutti i denominatori lo si divida per ciascun di essi; si ottiene:

$$24 : 3 = 8, \quad 24 : 6 = 4, \quad 24 : 12 = 2, \quad 24 : 24 = 1.$$

Moltiplicando ora i due termini di ciascuna frazione pel quoto ottenuto dividendo 24 pel denominatore di essa, si ha:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 8}{3\times 8}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5\times 4}{6\times 4}, \quad \frac{11}{12} = \frac{11\times 2}{12\times 2}, \quad \frac{13}{24} = \frac{13\times 1}{24\times 1}$$

Tutti i denominatori delle frazioni risultanti sono necessariamente uguali a 24, perchè ciascuno di essi è il prodotto del divisore pel quoto di una divisione in cui 24 era il dividendo.

In pratica si può disporre l'operazione come qui contro: porre cioè il denominatore comune sopra, e rimpetto ai termini di ciascuna frazione il quoto del denominatore comune diviso pel denominatore di essa frazione, preceduto dal segno di moltiplicazione.

$$\begin{array}{rrrr} & 24 & \text{D.} & \text{C.} \\ \hline 2 & \times\ 8 & & = 16 \\ \hline 3 & \times\ 8 & & = 24 \\ 5 & \times\ 4 & & = 20 \\ \hline 6 & \times\ 4 & & = 24 \\ 11 & \times\ 2 & & = 22 \\ \hline 12 & \times\ 2 & & = 24 \\ 13 & \times\ 1 & & = 13 \\ \hline 24 & \times\ 1 & & = 24 \end{array}$$

298. — Perchè sopra un numero si possa operare come si operò sul 24 nel precedente esempio, è necessario e sufficiente, come ad evidenza appare, che esso sia un multiplo comune ai denominatori delle frazioni date; quindi è che tutti i multipli comuni (259) ai denominatori, ed essi solamente, possono essere denominatori comuni alle frazioni. Dunque:

Il minimo comun denominatore di più frazioni è uguale al minimo multiplo dei loro denominatori.

299. — Siano ora le frazioni $^{5}/_{6}$, $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{12}$, $^{13}/_{36}$, $^{11}/_{54}$.

Il minimo multiplo de' loro denominatori è 216; esso è pertanto il minimo comun denominatore delle frazioni date, e la riduzione si eseguisce come nell'esempio precedente. Ecco il quadro dell'operazione.

Se si adoperasse il primo metodo (295) il denominatore comune di queste frazioni sarebbe 1119744.

				216 D. C.
5	×	36	=	180
6	×	36	=	216
3	×	27	=	81
8	×	27	=	216
7	×	18	=	126
12	×	18	=	216
13	×	6	=	78
36	×	6	=	216
11	×	4	=	44
54	×	4	=	216

300. — Affinchè il minimo multiplo de' denominatori sia realmente il più piccolo denominatore comune di cui sono suscettive le frazioni, bisogna prima ridurle a' minimi termini. Onde risulta la seguente

Regola. — *Per ridurre più frazioni al minimo comun denominatore:*

Si riducono tutte a' minimi termini;

Si cerca il minimo multiplo comune a tutti i denominatori (260, 265);

Si divide questo minimo multiplo per ciascun denominatore, e si moltiplicano i due termini della rispettiva frazione pel quoto ottenuto.

Osservazione. — Questo metodo può, come il primo, applicarsi a tutti i casi, ed ha su quello grandissimo vantaggio; salvo però il caso in cui i denominatori delle frazioni date fossero primi tra loro; giacchè in tal caso, il minimo multiplo dei denominatori essendo uguale al loro prodotto (261), i due metodi conducono ad un medesimo comun denominatore (*).

301. — Allorchè si vuol sapere qual sia tra più frazioni la maggiore o la minore, bisogna generalmente ridurle allo stesso denominatore (**). Non è facile, p. es., lo scorgere qual sia maggiore o $^{5}/_{9}$ o $^{6}/_{11}$; ma ridotte allo stesso denominatore, esse diventano rispettivamente $^{55}/_{99}$ e $^{54}/_{99}$; dal che si vede (276) la maggiore essere $^{55}/_{99}$ ossia $^{5}/_{9}$.

302. — ***Estrazione degl'interi dalle frazioni improprie.*** Le frazioni improprie essendo maggiori dell'unità (273), esse ne possono contenere una o più. Ora per la semplicità de' calcoli si debbono sovente estrarre tali unità.

(*) Ove si trattasse di ridurre più frazioni allo stesso *numeratore*, converrebbe operare sopra i numeratori come si è fatto sui denominatori.

(**) Si otterrebbe il medesimo scopo riducendole allo stesso numeratore.

Vogliasi, p. es., estrarre le unità contenute nell'espressione $^{45}/_{9}$.

Poichè 9 *noni* fanno un'unità, tante volte 9 sta in 45, altrettante unità contiene la frazione proposta. Bisogna dunque dividere 45 per 9, il che dà 5.

Venga proposto di cercare le unità contenute in $^{80}/_{7}$.

Conforme alla spiegazione data poc'anzi, si otterrà il numero delle unità dividendo 80 per 7, che dà 11 per quoto e 3 per residuo. Perciò nella proposta espressione sono 11 unità e $^{3}/_{7}$ di unità. Si deduce da ciò la seguente

Regola. — *Per ridurre le frazioni improprie in interi bisogna dividere il numeratore pel denominatore; il quoto darà le unità, e il residuo, se ve n'ha, sarà il numeratore d'una frazione, la quale avrà per denominatore quello della frazione primitiva.*

303. — ***Riduzione degl'interi sotto forma di frazione.*** Talvolta la semplicità de'calcoli richiede appunto un'operazione inversa alla precedente, cioè che si riducano gli interi a forma di frazione.

Abbiasi 24 interi da ridurre in *ottavi*.

Poichè ciascuna unità contiene 8 ottavi, 24 unità ne conterranno 24 volte 8. Bisogna dunque moltiplicare 24 per 8 il che dà 192 *ottavi*, ossia $^{192}/_{8}$.

Sia ancora da ridurre 15 interi e $^{3}/_{5}$ in una sola espressione frazionaria, cioè in *quinti*.

Poichè 15 interi fanno $^{75}/_{5}$, 15 interi e $^{3}/_{5}$ faranno $^{75}/_{5}+^{3}/_{5}=^{78}/_{5}$. Onde risulta la seguente

Regola. — *Per ridurre interi in frazioni si moltiplicano pel dato denominatore; se v'ha cogl'interi una frazione si aggiunge il numeratore al prodotto, e al risultato si dà il denominatore stesso della frazione.*

304. — ***Numeri misti.*** Per brevità chiameremo d'ora innanzi *numeri misti* le espressioni composte d'una parte intera e d'una frazione, come $11+^{3}/_{7}$ e le scriveremo senza il segno +, cioè $11\ ^{3}/_{7}$.

§ 4° — ADDIZIONE DELLE FRAZIONI.

305. — L'addizione delle frazioni presenta tre casi:

1° Addizione di frazioni aventi lo stesso denominatore.

2° Addizione di frazioni aventi denominatori diversi.

3° Addizione di numeri misti.

306. — I° ***Caso.*** Abbiansi da sommare le seguenti frazioni $^3/_8$, $^5/_8$ e $^7/_8$.

Queste frazioni rappresentano parti della medesima grandezza, cioè 8 volte minori dell'unità; perciò la loro somma sarà uguale al complesso di queste parti, ossia (274) ad una frazione avente per numeratore la somma $3+5+7$ delle parti, e per denominatore quello che indica la grandezza di queste parti, cioè 8. Dunque

$$^3/_8+^5/_8+^7/_8=\frac{3+5+7}{8}=^{15}/_8, \text{ ovv. (302) } 1\ ^7/_8.$$

307. — II° ***Caso.*** Siano ora le frazioni $^2/_5$. $^4/_7$ e $^8/_9$.

Le parti rappresentate da queste frazioni sono di grandezza diversa e perciò non si possono sommare (275). Bisogna dunque trasformarle in altre equivalenti e le cui parti abbiano la stessa grandezza; il che si fa riducendole allo stesso denominatore. Quindi si opererà come nel 1° caso. Si può disporre l'operazione come qui contro.

$$\frac{2}{5}=\frac{2.7.9}{5.7.9}=126/315$$
$$\frac{4}{7}=\frac{4.5.9}{7.5.9}=180/315$$
$$\frac{8}{9}=\frac{8.5.7}{9.5.7}=280/315$$

$^2/_5+^4/_7+^8/_9=\ldots\ldots$ 586/315, ovv. $1\ ^{271}/_{315}$.

308. — III° ***Caso.*** Debbansi finalmente sommare i numeri misti $4\ ^5/_8$, $6\ ^9/_{11}$ e $12\ ^6/_7$.

Si fa da prima la somma delle frazioni come nel 2° caso, poi, estrattine gl'interi, si sommano cogl'interi dati.

4	385/616
6	504/616
12	528/616
	1417/616 ovv. $2\ ^{185}/_{616}$.
	$24\ ^{185}/_{616}$.

309. — Dai tre precedenti esempi s'inferisce la seguente

Regola. — *Per sommare più frazioni si riducono allo stesso denominatore, poi si fa la somma dei numeratori alla quale si dà il denominatore comune.*

Per sommare numeri misti si fa prima la somma delle frazioni, ed estrattine gl'interi, si sommano cogl'interi dati.

Problemi sull'Addizione delle frazioni.

116. Cecco farebbe un lavoro in 14 settimane, Giocondo in 24, Leandro in 32 e Tonio in 16; qual parte del lavoro faranno in una settimana lavorando insieme?

117. In un'officina sono tre becchi a gas; il 1° ne consuma litri 561 in 4 ore, il 2° 400 in 3, ed il 3° 610 in 6; dicasi quanti litri ne consumino insieme in un'ora.

118. Comperai tre rotoli di carta; il 1° è m. $2\ ^1/_3$ più lungo del 2°, e questo m. $4\ ^1/_3$ più del 3°, il quale è di m. $14\ ^1/_7$. Qual è la lunghezza dei due primi?

119. In un filatoio sono 3 macchine a vapore; la 1ª consuma Cg. $3\ ^5/_6$ di carbon fossile all'ora, la 2ª Cg. $8\ ^2/_7$ più della 1ª, e Cg. $5\ ^3/_5$ meno della 3ª. Quanto consuma all'ora ogni macchina, e quanto tutte insieme?

120. Di tre fonti, una può riempire la vicina vasca in $^1/_5$ d'ora, una 2ª in $^1/_8$ ed una 3ª in $^1/_7$; in quanto tempo la riempirebbero scorrendo insieme?

121. Tre compagnie d'operai scaverebbero un pozzo, la 1ª in 9 giorni, la 2ª in 10, e la 3ª in 12; se impiegasi $^1/_4$ della 1ª, $^1/_3$ della 2ª ed $^1/_2$ della 3ª, in quanto tempo si compirà lo scavamento?

122. I $^3/_5$ sommati col $^1/_3$ di quanto ho, più 10 ll., danno 6 ll. più del mio avere; quanto ho io?

123. Aristodemo volendo far costrurre un muro, gli si presentano due compagnie di muratori; la prima può farlo in 6 giorni lavorando 9 ore il dì, la 2ª in 8 giorni lavorando 7 ore. S'ei le accetta ambedue, in quanto tempo glielo condurranno a termine lavorandovi 8 ore il dì?

§ 5° — SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI.

310. — La sottrazione delle frazioni presenta tre casi:

1° Sottrazione di frazioni aventi lo stesso denominatore.

2° Sottrazione di frazioni aventi denominatori diversi.

3° Sottrazione di numeri misti.

311. — I° ***Caso.*** Debbasi sottrarre $^4/_9$ da $^7/_9$.

La differenza di queste due frazioni conterrà evidentemente $7 - 4$ parti della medesima grandezza, cioè 9 volte più piccole dell'unità; perciò essa verrà rappresentata (274) da una frazione avente per numeratore $7 - 4$, e per denominatore 9. Dunque

$$^7/_9 - ^4/_9 = \frac{7-4}{9} = ^3/_9, \text{ ovv. (291) } ^1/_3.$$

312. — II° ***Caso.*** Abbiasi ora da sottrarre $^3/_8$ da $^6/_7$.

Ragionando come nel 2° caso dell'addizione (307), si conchiude che bisogna ridurre le frazioni allo stesso denominatore, e quindi operare come nell'esempio precedente. Si ha dunque

$$^6/_7 - ^3/_8 = \frac{6.8}{7.8} - \frac{3.7}{8.7} = \frac{48-21}{56} = \frac{27}{56}.$$

313. — III° ***Caso.*** Sia da sottrarre $2\,{}^{8}/_{11}$ da $3\,{}^{3}/_{4}$.

Si fa prima la sottrazione delle frazioni come nel 2° caso, quindi sottraggonsi gl'interi.

$$3\,{}^{3}/_{4} - 2\,{}^{8}/_{11} = 3\,{}^{33}/_{44} - 2\,{}^{32}/_{44} = 1\,{}^{1}/_{44}.$$

Vogliasi ancora togliere $12\,{}^{7}/_{8}$ da $15\,{}^{2}/_{5}$.

Si ha da prima $15\,{}^{2}/_{5} - 12\,{}^{7}/_{8} = 15\,{}^{16}/_{40} - 12\,{}^{35}/_{40}$;
ma la frazione del minuendo essendo più piccola di quella del sottraendo, bisogna, per poter effettuare la sottrazione, convertire in *quarantesimi* una delle 15 unità del minuendo ed aggiungerla ai ${}^{16}/_{40}$ ch'esso contiene. Con ciò si avrà

$$15\,{}^{2}/_{5} - 12\,{}^{7}/_{8} = 15\,{}^{16}/_{40} - 12\,{}^{35}/_{40} = 14 + 1\,{}^{16}/_{40} - 12\,{}^{35}/_{40}$$
$$= 14\,{}^{56}/_{40} - 12\,{}^{35}/_{40} = 2\,{}^{21}/_{40}.$$

Si ottiene similmente

$$24 - 19\,{}^{5}/_{7} = 23 + 1 - 19\,{}^{5}/_{7} = 23\,{}^{7}/_{7} - 19\,{}^{5}/_{7} = 4\,{}^{2}/_{7}.$$

314. — Da quanto precede s'inferisce la seguente

Regola. — *Per effettuare la sottrazione delle frazioni si riducono allo stesso denominatore, si prende la differenza dei numeratori alla quale si dà il denominatore comune.*

Per effettuare la sottrazione dei numeri misti si sottraggono separatamente gl'interi e le frazioni, avvertendo che se la frazione del minuendo è minore di quella del sottraendo la si aumenta prima d'un'unità presa sugli interi del minuendo e ridotta in frazione avente il denominatore comune.

315. — ***Osservazione.*** Venga proposto di ridurre in un sol numero frazionario l'espressione

$${}^{3}/_{4} + {}^{7}/_{8} - {}^{1}/_{3} - {}^{5}/_{6} + {}^{1}/_{2} - {}^{5}/_{12}.$$

Riducendo tutte le frazioni al minimo denominatore comune, l'espressione diventa

$$\frac{18}{24} + \frac{21}{24} - \frac{8}{24} - \frac{20}{24} + \frac{12}{24} - \frac{10}{24}, \text{ ovv. } \frac{18}{24} + \frac{21}{24} + \frac{12}{24} - \frac{8}{24} - \frac{20}{24} - \frac{10}{24}$$

Si dovrebbe ora, come indicano i segni, sottrarre dalla somma delle tre prime frazioni successivamente le tre ultime; ma ciò equivale a sottrarre dalla prima somma quella di queste tre ultime frazioni.

L'espressione si può dunque scrivere

$$\left(\frac{18}{24} + \frac{21}{24} + \frac{12}{24}\right) - \left(\frac{8}{24} + \frac{20}{24} + \frac{10}{24}\right) = \frac{18+21+12}{24} - \frac{8+20+10}{24}$$
$$= \frac{51}{24} - \frac{38}{24} = \frac{13}{24}.$$

Problemi sulla Sottrazione delle frazioni.

124. Due fontane riempirebbero un bacino, la 1ª in 3 ore, e la 2ª in 5; posto che l'acqua esca da due cannelle di cui una lo vuoterebbe in due ore, e l'altra in 8, dicasi di quanto aumenterà o scemerà in un'ora l'acqua del bacino, aprendo il tutto ad un tempo.

125. Tre fonti possono riempire una vasca, la 1ª in 2 ore, la 2ª in 4 e la 3ª in 3; dicasi di quanto l'acqua aumenti o diminuisca nella vasca all'ora, se contemporaneamente alle fonti si aprono tre chiavette, la prima delle quali la vuoterebbe in 1 ora, la 2ª in 5 e la 3ª in 8.

126. Caio, Tizio e Sempronio partono insieme dalla medesima città e nella stessa direzione; se il primo fa 47 Cm. in 3 ore, il 2° 53 in 6, ed il 3° 31 in 5, trovisi a quale distanza saranno l'uno dall'altro dopo un'ora di cammino.

127. Se da quanto ho, diceva Lucio, tolgo i $^2/_3$ ed al resto aggiungo 44 ll., il mio avere aumenta di $^1/_4$; dite quanto abbia.

128. Un serbatoio riceve all'ora lit. 45 $^3/_4$ d'acqua, e ne perde 37 $^1/_3$; di quanti litri aumenta l'acqua in un'ora?

129. Qual è il valore d'un candelabro, se la differenza fra i $^3/_4$ ed i $^2/_5$ di esso è di 14 lire?

130. La somma dei $^4/_5$ e dei $^3/_{10}$ d'un numero meno la sua metà, è 24; trovisi questo numero.

131. Il $^1/_4$ d'un terreno è coltivato a trifoglio, i $^3/_7$ a vite, ed il resto a frumento; la vite occupando 10 are più del trifoglio, domandasi la superficie del terreno e quella occupata da ciascuna derrata.

132. Se Maddalena dopo venduto i $^4/_7$ delle sue uova ne aggiunge 105 al resto, il numero primitivo trovasi aumentato di $^1/_2$; quante uova aveva ella?

§ 6° — MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

316. — La moltiplicazione delle frazioni presenta quattro casi:

1° Moltiplicazione d'una frazione per un numero intero.

2° Moltiplicazione d'un numero intero per una frazione.

3° Moltiplicazione d'una frazione per una frazione.

4° Moltiplicazione di numeri misti.

317. — I° **Caso.** Debbasi moltiplicare $^4/_9$ per 8.

In conseguenza del teorema dimostrato al n° 277, si ha direttamente

$$^4/_9 \times 8 = \frac{4 \times 8}{9} = \frac{32}{9}$$ Dunque:

Regola. — *Per moltiplicare una frazione per un numero intero, si moltiplica il numeratore pel numero intero, ed al prodotto si dà il denominatore della frazione.*

318. — II° **Caso.** Sia da moltiplicare 7 per $^5/_6$.

Poichè la frazione $^5/_6$ è 6 volte più piccola del suo numeratore 5, il prodotto $7 \times ^5/_6$ dev'essere 6 volte più piccolo di 7×5; perciò si ha

$$7 \times ^5/_6 = \frac{7 \times 5}{6} = \frac{35}{6}$$. Dunque:

Regola. — *Per moltiplicare un intero per una frazione, si moltiplica l'intero pel numeratore della frazione, ed al prodotto si dà il denominatore di essa frazione.*

319. — III° **Caso.** Vogliasi moltiplicare $^7/_8$ per $^5/_{11}$.

La frazione $^5/_{11}$ essendo 11 volte minore del suo numeratore 5, il prodotto $^7/_8 \times ^5/_{11}$ dev'essere 11 volte minore di $^7/_8 \times 5$ ossia $\frac{7 \times 5}{8}$; pertanto, a fine di ottenere il richiesto prodotto, bisogna rendere $\frac{7 \times 5}{8}$ 11 volte più piccolo, il che si fa (278) moltiplicando per 11 il denominatore 8. Si ha perciò

$$^7/_8 \times ^5/_{11} = \frac{7 \times 5}{8 \times 11} = \frac{35}{88}$$. Dunque:

Regola. — *Per moltiplicare una frazione per un'altra, si moltiplicano i numeratori tra loro e i denominatori tra loro, poi al primo prodotto si dà per denominatore il secondo.*

320. — **Corollario.** *Il prodotto di due frazioni non cambia quando s'invertono i fattori.*

321. — IV° **Caso.** Venga finalmente proposto di moltiplicare $5\ ^3/_4$ per $9\ ^7/_8$.

Riducendo gl'interi a forma di frazione, si ha

$$5\ ^3/_4 = ^{23}/_4, \text{ e } 9\ ^7/_8 = ^{79}/_8;$$

quindi

$$5\ ^3/_4 \times 9\ ^7/_8 = \frac{23}{4} \times \frac{79}{8} = \frac{23 \times 79}{4 \times 8} = \frac{1817}{32} = 56\ ^{25}/_{32}$$. Dunque:

Regola. — *Per moltiplicare tra loro due numeri misti, si riduce prima ciascuno di essi in una sola espressione frazionaria; quindi si moltiplicano queste tra loro, e dal prodotto si estraggono gl'interi.*

322. — ***Altra regola.*** *Per moltiplicare tra loro due numeri misti, si moltiplica l'intero e la frazione del moltiplicando, prima per l'intero e poi per la frazione del moltiplicatore; si estraggono gl'interi dai prodotti, che sono frazioni improprie, e da ultimo si sommano i prodotti parziali.*

Applichiamo questa regola all'esempio precedente.

Moltiplicando..... $5 + {}^{3}/_{4}$
Moltiplicatore..... $9 + {}^{7}/_{8}$

Prodotto di 5 *per* 9.. 45
» *di* $^{3}/_{4}$ *per* 9.. $6 + {}^{3}/_{4}$
» *di* 5 *per* $^{7}/_{8}$ $4 + {}^{3}/_{8}$
» *di* $^{3}/_{4}$ *per* $^{7}/_{8}$ $\quad {}^{21}/_{32}$

Risultato... $55 + {}^{57}/_{32}$ ovv. $56\ {}^{25}/_{32}$.

La precedente regola deriva dal n° 164.

323. — ***Osservazione.*** Si è veduto (277 e 278) che una frazione si moltiplica per un numero intero, o moltiplicando il numeratore, o dividendo il denominatore per questo intero. Per conseguenza, nei due primi casi della moltiplicazione delle frazioni, se il denominatore è divisibile per l'intero, invece di moltiplicare il numeratore si può dividere il denominatore per il numero intero.

Sia per esempio $^{5}/_{18}$ da moltiplicarsi per 3; si otterrà lo stesso risultato, sia moltiplicando il numeratore: $\frac{5}{18} \times 3 = \frac{5 \times 3}{18} = \frac{15}{18}$

sia dividendo il denominatore: $\frac{5}{18} \times 3 = \frac{5}{18 : 3} = \frac{5}{6}$.

Ed invero, riducendo $^{15}/_{18}$ a' minimi termini si ottiene $^{5}/_{6}$; dunque $^{5}/_{6} = {}^{15}/_{18}$.

324. — ***Prodotto di più frazioni.*** Per fare il prodotto di parecchie frazioni, per es. $^{3}/_{7}$, $^{4}/_{9}$, $^{7}/_{8}$, $^{6}/_{11}$, bisogna (99) moltiplicare tra loro le due prime, quindi il prodotto di queste per la terza, poi questo nuovo prodotto per la quarta, ecc. Si ha dunque

$$^{3}/_{7} \times {}^{4}/_{9} \times {}^{7}/_{8} \times {}^{6}/_{11} = \frac{3 \times 4 \times 7 \times 6}{7 \times 9 \times 8 \times 11}.$$

Da ciò s'inferisce che:
Per moltiplicare più frazioni si moltiplicano i numeratori tra loro e i denominatori tra loro, ed al primo prodotto si dà per denominatore il secondo.

325. — ***Corollario.*** *Il prodotto di più frazioni non cambia quando s'inverte l'ordine de' fattori.*

Osservazione. — Prima di eseguire la moltiplicazione, giova sopprimere tutti i fattori comuni al numeratore ed al denominatore del prodotto.

Con tal mezzo il prodotto precedente sarà

$$\frac{3\times4\times7\times6}{7\times9\times8\times11}=\frac{3\times4\times6}{9\times8\times11}=\frac{4\times6}{3\times8\times11}=\frac{6}{3\times2\times11}=\frac{1}{11}.$$

326. — ***Frazioni di frazioni.*** Il prodotto d'una quantità qualsiasi per $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$,... uguaglia (142) un *mezzo*, un *terzo*, un *quarto*,... di questa quantità; per conseguenza moltiplicando una quantità per $^2/_3$, $^3/_4$, $^2/_5$,... si avranno due *terzi*, tre *quarti*, due *quinti*,.. della medesima. Da ciò si conchiude che:

Il prodotto di qualsivoglia numero per una frazione rappresenta la parte di questo numero indicata dalla frazione.

Per esempio, il prodotto di 10 per $^3/_4$ rappresenta i $^3/_4$ di 10, il prodotto di $^7/_8$ per $^2/_3$ è i $^2/_3$ di $^7/_8$, ecc

Gli è perciò che tali prodotti si sogliono chiamare *frazioni di intero* o *frazioni di frazione*, secondo che il moltiplicando è un intero od una frazione.

Il prodotto di parecchie frazioni dicesi pure *frazione di frazioni*, perchè esso rappresenta una parte di altre frazioni. Per esempio, il prodotto $\frac{3\times4\times7}{7\times9\times8}$ rappresenta i $^7/_8$ dei $^4/_9$ di $^3/_7$.

Problemi sulla Moltiplicazione delle frazioni.

133. Raimondo avendomi somministrato $^1/_{16}$ d'un m. di panno da ll. 15 il m., io gli diedi $^5/_6$ d'un metro di tela da $^5/_8$ di lira il m. Quanto gli debbo ancora?

134. Debbo ll. 75600; se ne pago un $^1/_3$ in contanti e $^2/_9$ fra 6 mesi, di quanto sarò io ancor debitore, ove $^1/_{36}$ del debito mi venga condonato?

135. A quanto montano i $^2/_{11}$ d'una pezza di traliccio lunga m. 64 $^7/_9$ a ll. 2 $^3/_5$ il metro?

136. Metri 3 $^1/_3$ di tela comprati a ll. 1 $^1/_5$ il m. furono rivenduti per ll. 4 $^3/_{16}$; qual fu il guadagno?

137. Lire 4260 debbono essere divise fra tre persone, in guisa che la 1ª abbia i $^5/_8$ dei $^2/_3$ dei $^6/_{13}$ della somma, la 2ª i $^3/_4$ di $^1/_6$ dei $^4/_5$ della medesima, e la 3ª il resto; quanto toccherà a ciascuna?

138. Si fusero 3 gr. d'argento con 5 di rame; quanto metallo d'ogni specie troverassi nei $^2/_9$ d'un gramma della lega?

139. Mescolaronsi 4 litri d'acqua con 11 di vino; quanta acqua e quanto vino conterranno i $^5/_7$ di litro del miscuglio?

140. Qual è il numero di cui i $^5/_6$ degli $^8/_9$ fanno 120?

141. Tre persone si dividono un'eredità; se la 1ª ne riceve i $^3/_7$, la 2ª i $^2/_3$ del resto, e la terza il rimanente, qual parte dell'eredità avrà ciascuna delle due ultime?

142. Quant'oro e quanto rame havvi nei $^3/_5$ di gr. d'una lega in cui entrano 9 grammi del primo metallo e 2 del secondo?

143. Posto che nella composizione della polvere da cannone

entrino 7 Cg. di salnitro, 2 di carbone ed 1 di zolfo, dicasi quanto d'ogni sostanza trovisi nei $^3/_4$ d'un Cg. di tal polvere.

144. Fulvio farebbe un lavoro in $^2/_3$ di giorno, e Flaminio in $^4/_5$; domandasi: 1° quanto tempo v' impiegherebbero lavorando insieme, 2° qual parte del lavoro farebbe ciascuno, 3° qual sarebbe il rispettivo loro guadagno ove si pagasse l'intero lavoro ll. 5 $^1/_2$.

§ 7° — DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

327. — La divisione delle frazioni presenta quattro casi:

1° Divisione d'una frazione per un numero intero.
2° Divisione d'un numero intero per una frazione.
3° Divisione d'una frazione per una frazione.
4° Divisione di numeri misti.

328. — I° ***Caso.*** Debbasi dividere $^4/_9$ per 8.

Giusta il teorema dimostrato al n° 278, si ha direttamente

$$^4/_9 : 8 = \frac{4}{9 \times 8} = \frac{4}{72}.$$ Dunque:

Regola. — *Per dividere una frazione per un numero intero, si moltiplica il denominatore per l'intero, ed il prodotto si dà per denominatore al numeratore della frazione.*

329. — II° ***Caso.*** Sia da dividere 7 per $^5/_6$.

Poichè la frazione $^5/_6$ è 6 volte minore del suo numeratore 5, il quoto $7 : {}^5/_6$ dev'essere 6 volte maggiore di $7 : 5$, ossia $^7/_5$; perciò si ha

$$7 : {}^5/_6 = \frac{7}{5} \times 6 = \frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5}.$$ Dunque:

Regola. — *Per dividere un numero intero per una frazione, si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione, e al prodotto si dà per denominatore il numeratore della frazione. O più brevemente: si moltiplica l'intero per la frazione rovesciata.*

330. — III° ***Caso.*** Vogliasi dividere $^7/_8$ per $^5/_{11}$.

La frazione $^5/_{11}$ essendo 11 volte minore del suo numeratore 5, il quoto $^7/_8 : {}^5/_{11}$ dev'essere 11 volte maggiore di $^7/_8 : 5$, ossia $\frac{7}{8 \times 5}$ perciò si ha

$$^7/_8 : {}^5/_{11} = \frac{7}{8 \times 5} \times 11 = \frac{7 \times 11}{8 \times 5} = \frac{77}{40}.$$ Dunque:

Regola. — *Per dividere una frazione per un'altra, si moltiplica il numeratore della frazione-dividendo pel denominatore della frazione-divisore, ed il denominatore della prima pel numeratore della seconda. O più brevemente: si moltiplica la frazione-dividendo per la frazione-divisore rovesciata.*

331. — IV° **Caso.** Venga finalmente proposto di dividere $9\ ^{7}/_{8}$ per $5\ ^{3}/_{4}$.

Riducendo gli interi a forma di frazione si ha

$$9\ ^{7}/_{8} = {}^{79}/_{8} \text{ e } 5\ ^{3}/_{4} = {}^{23}/_{4}.$$

quindi

$9\ ^{7}/_{8} : 5\ ^{3}/_{4} = {}^{79}/_{8} : {}^{23}/_{4} = {}^{79}/_{8} \times {}^{4}/_{23} = {}^{316}/_{184}$, ovvero $1\ ^{33}/_{46}$. Dunque:

Regola. — *Per dividere un numero misto per un altro, si riduce ciascuno di essi in una sola espressione frazionaria, poi si divide la frazione-dividendo per la frazione-divisore.*

332. — **Altra regola.** *Per dividere un numero misto per un altro, si riduce il divisore in una sola espressione frazionaria, si divide l'intero e la frazione del dividendo per questa espressione frazionaria, e si sommano i due quoti dopo averne estratti gl'interi se ne contengono.*

Applichiamo questa regola all'esempio precedente.

Dividendo	$9 + {}^{7}/_{8}$
Divisore	$^{23}/_{4}$
Quoto di 9 per $^{23}/_{4}$ . . . $^{36}/_{23}$, ovv.	$1 + {}^{13}/_{23}$
» *di* $^{7}/_{8}$ *per* $^{23}/_{4}$ . . $^{7}/_{8} \times {}^{4}/_{23}$, ovv.	$^{7}/_{46}$
Risultato	$1 + {}^{33}/_{46}$

La precedente regola deriva dal n° 184.

333. — **Osservazione 1ª.** Si è veduto (277 e 278) che una frazione si divide per un numero intiero, o dividendo il numeratore, o moltiplicando il denominatore per questo intero. Per conseguenza, nel primo caso della divisione delle frazioni, se il numeratore è divisibile per l'intero, invece di moltiplicare il denominatore, si può dividere il numeratore pel numero intero.

Sia p. es. $^{14}/_{15}$, da dividere per 7; si otterrà lo stesso risultato, sia moltiplicando il denominatore: $\frac{14}{15} : 7 = \frac{14}{15 \times 7} = \frac{14}{105} = \frac{2}{15}$,

sia dividendo il numeratore: $\frac{14}{15} : 7 = \frac{14 : 7}{15} = \frac{2}{15}$.

334. — **Osservazione 2ª.** Dalle regole finora dimostrate sulla moltiplicazione e sulla divisione delle frazioni, si deduce che, ove si avessero da moltiplicare più frazioni $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{7}$, $^{8}/_{9}$, $^{7}/_{15}$, e da dividere il loro prodotto successivamente per varie altre frazioni $^{9}/_{11}$, $^{33}/_{24}$, $^{2}/_{5}$ si otterrebbe il risultato finale col far di tutte

queste frazioni un solo prodotto, avvertendo di rovesciare quelle che fanno da divisori; così:

$$\frac{3\times5\times8\times7\times11\times24\times3}{4\times7\times9\times15\times9\times33\times2}=\frac{8\times11\times24\times3}{4\times9\times9\times33\times2}=\frac{24}{9\times9}=\frac{8}{9\times3}=\frac{8}{27}.$$

335. — ***Quantità reciproche.*** Due quantità si dicono **reciproche** od **inverse** quando il loro prodotto uguaglia l'unità.

Chiamando per tanto x la reciproca d'un numero intero a; si avrà

$$a\times x=1, \text{ donde } x=\frac{1}{a}. \text{ Dunque:}$$

La reciproca d'un numero intero è una frazione che ha per numeratore l'unità, e per denominatore lo stesso numero intero.

Es. Le quantità reciproche di 6, 8, 12,... sono rispettivamente $^1/_6, ^1/_8, ^1/_{12}, \ldots$

Sia ancora x la reciproca d'una frazione $\frac{a}{b}$; si avrà

$$\frac{a}{b}\times x=1, \text{ donde } x=1:\frac{a}{b}=1\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}. \text{ Dunque:}$$

La reciproca d'una frazione è una frazione che ha i medesimi termini, ma scritti in ordine inverso.

Es. Le quantità reciproche di $^3/_4, ^7/_8, ^{16}/_5, \ldots$ sono rispettivamente $^4/_3, ^8/_7, ^5/_{16}, \ldots$

336. — ***Teorema.*** *Moltiplicare una quantità* a *per una altra* b *torna lo stesso che dividere* a *per la reciproca di* b. *E* viceversa, *dividere una quantità* a *per un'altra* b *torna lo stesso che moltiplicare* a *per la reciproca di* b.

Di fatti, la reciproca di b è $\frac{1}{b}$ ora si ha

$$1^\circ \qquad a:\frac{1}{b}=a\times\frac{b}{1}=a\times b:$$

cioè che a moltiplicato per b uguaglia a diviso per $\frac{1}{b}$.

$$2^\circ \qquad a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b};$$

cioè che a diviso per b uguaglia a moltiplicato per $\frac{1}{b}$.

337. — ***Trasformare una frazione in altra equivalente, e che abbia per denominatore un numero dato.*** Proponiamoci di ridurre $^5/_6$ in *diciottesimi*, cioè in frazione avente per denominatore 18.

Se fosse noto il numero dei *diciottesimi* contenuti in $^5/_6$, si avrebbe la frazione richiesta dando a questo numero il denominatore 18. Ora, giusta la definizione della divisione, il numero dei diciottesimi contenuti in $^5/_6$ si ottiene col dividere $^5/_6$ per $^1/_{18}$. Facendo questa divisione, si ha

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{18} = \frac{5}{6} \times \frac{18}{1} = \frac{5 \times 18}{6} = 15;$$

dunque la frazione richiesta è $^{15}/_{18}$.

Abbiasi ancora da ridurre $^5/_{11}$ in *quindicesimi.*

Si avrà similmente

$$\frac{5}{11} : \frac{1}{15} = \frac{5}{11} \times \frac{15}{1} = \frac{5 \times 15}{11} = \frac{75}{11} = 6\,{}^9/_{11}.$$

In questo caso la frazione proposta non è esattamente convertibile in *quindicesimi;* essa contiene $^6/_{15}$ più $^9/_{11}$ di $^1/_{15}$, ossia $^6/_{15}$ più $^9/_{165}$ (326).

Da questi due esempi s'inferisce la seguente

Regola. — *Per ridurre una frazione in altra d'un dato denominatore, ed avente lo stesso valore della prima, od almeno il più approssimato possibile, si moltiplica il numeratore della frazione data pel denominatore della nuova frazione e si divide il prodotto pel denominatore della frazione data; gl' interi del quoto risultante formano il numeratore della frazione cercata.*

Osservazione. — Una frazione può sempre supporsi irreduttibile; giacchè se non è tale, lo diventa ove si dividano ambi i termini di essa pel loro massimo comun divisore. Ciò posto, se una frazione sia o no convertibile in altra di un dato denominatore, si può conoscese mediante il teorema seguente.

338. — ***Teorema.*** *Affinchè una frazione irreduttibile* $\frac{a}{b}$ *si possa convertire in altra equivalente di un denominatore dato* B, *è necessario e sufficiente che questo sia multiplo del denominatore della frazione data.*

Di fatti, affinchè la conversione si possa fare è necessario e sufficiente che l'espressione $\frac{a \times B}{b}$ sia un numero intero; ora, poichè a è primo con b, quest'espressione sarà un numero intero se b divide B (235), e non sarà tale nel caso contrario (251).

Problemi sulla divisione delle frazioni.

145. Si permutarono m. $7\,{}^1/_2$ di panno con steri $6\,{}^3/_5$ di legna; quanta legna si ebbe per 1 m. di panno, e quanto di questo per 1 stero di legna?

146. Quanto tempo impiegherebbero due zampilli ad empire un bacino di lit. 508, se il 1° ne dà $5\ ^{3}/_{4}$ al minuto, ed il 2° $4\ ^{5}/_{6}$?

147. Dopo venduti i $^{4}/_{7}$ d'un barile d'aringhe rimangono ancora i $^{2}/_{9}$ del barile; più 260 aringhe; dicasi il numero di esse ed il loro valore, posto che si vendano ll. 3,75 il centinaio.

148. Melchiorre pagò ll. 468 per 3 botti di vino; se la 2ª costa i $^{2}/_{3}$ della 1ª, e la terza i $^{3}/_{4}$ della 2ª, qual è il prezzo di ciascuna?

149. Da due pezze di tela Matilde trasse 10 tovaglie di m. $3\ ^{3}/_{4}$ l'una e 10 dozzine e $^{1}/_{2}$ di salviette di m. $1\ ^{1}/_{5}$; la 2ª pezza essendo solo i $^{2}/_{3}$ della 1ª, dicasi la lunghezza d'ognuna.

150. L'oriuolo d'Eufemio segna $^{3}/_{4}$ d'ora più del mio, ed avanza di minuti $4\ ^{2}/_{3}$ il dì, mentre all'incontro il mio ritarda di minuti $5\ ^{7}/_{8}$: fra quanto tempo si troveranno insieme?

151. Per tapezzare le pareti d'una sala occorrono rotoli $15\ ^{3}/_{8}$ di carta larga $^{4}/_{7}$ di metro; quanti rotoli occorrerebbero ove la larghezza della carta fosse soltanto $^{8}/_{21}$ di metro?

152. Un bacino capace di lit. 820 è munito di 2 cannelle; se dalla 1ª riceve lit. $2\ ^{2}/_{3}$ d'acqua in $^{2}/_{5}$ di minuto, e dall'altra ne perde lit. $2\ ^{1}/_{9}$ in $^{3}/_{4}$ di minuto, trovisi in quanto tempo si empirà aprendole ambedue contemporaneamente.

153. Di tre compagnie d'operai presentatesi per iscavare una cisterna, la 1ª può scavarla in 45 giorni, la 2ª 52, e la 3ª in 36; quanti giorni impiegheranno lavorando insieme?

154. Una botte munita di tre cannelle può vuotarsi in ore $2\ ^{1}/_{2}$ aprendone due; se invece apronsi tutte e tre si vuota in due ore. Dicasi in quanto tempo sarà vuota aprendosi solo la terza.

155. Tre getti d'acqua riempirebbero il bacino sottostante, il 1° in 1 ora e $^{2}/_{5}$, il 2° in 2 ore e $^{3}/_{4}$, ed il 3° in $4\ ^{5}/_{8}$; se contemporaneamente ad essi apresi una cannella che vuoterebbelo in 1 ora e $^{2}/_{3}$, dicasi in quanto tempo sarà pieno.

156. Una volpe fa 2 passi e $^{1}/_{2}$ al minuto secondo, ed il cane che l'insegue ne fa $4\ ^{1}/_{2}$; quanto tempo porrà il cane a raggiungerla, se quand'esso partì la volpe aveva già fatto 30 passi e $^{3}/_{4}$?

157. Posto che in 2 ore un corriere faccia 3 Mm., ed un altro 9 in 5 ore; fra quanto tempo il 2° raggiungerà il 1°, se egli partì 3 ore dopo?

§ 8° — FRAZIONI DECIMALI.

339. — Le **frazioni decimali** sono quelle (272) in cui l'unità è divisa in 10, 100, 1000,... parti uguali.

Le espressioni $^{1}/_{10}$, $^{75}/_{100}$, $^{84}/_{1000}$, sono pertanto frazioni decimali.

I denominatori delle frazioni decimali essendo potenze di 10, sono tutti compresi nella formola 10^{n}.

340. — Le frazioni decimali hanno la proprietà di potersi esprimere con un solo termine.

Per es. le precedenti si esprimono così: 0,1; 0,75; 0,084.

341. — Se prima della frazione decimale vi sono interi, l'espressione dicesi **numero decimale**; tali sono 12,25; 1,50; 4,0001.

Le operazioni sulle frazioni decimali essendo state trattate con quelle sopra gl'interi, ci limiteremo qui a considerarle in relazione colle frazioni ordinarie.

Riduzione delle Frazioni ordinarie in decimali.

342. — Ogni frazione ordinaria può convertirsi in frazione decimale del medesimo valore, o almeno di un valore approssimativo quanto si vorrà.

Venga proposto di ridurre $^5/_8$ in decimali.

$^5/_8$ esprimono il quoto di 5 unità per 8: ora, 5 unità valgono 50 decimi, i quali divisi per 8 danno per quoto 6 decimi, e 2 di residuo; 2 decimi valgono 20 centesimi, che divisi per 8 danno 2 centesimi; infine il residuo 4 vale 40 millesimi, quali danno per quoto 5 millesimi; dimodochè la frazione $^5/_8$ è uguale alla frazione decimale 0,625.

50	8
20	
40	0,625
0	

Da ciò deducesi la seguente

Regola. — *Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, bisogna supporre alla destra del numeratore 1, 2, 3, 4,... zeri e quindi operare la divisione. Il quoto esprimerà decimi, centesimi, ecc., secondo che si saranno aggiunti 1, 2,... zeri al numeratore.*

343. — ***Osservazione.*** La precedente riduzione non è che un caso particolare di quella trattata al n° 337; giacchè ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale gli è convertirla in altra di un dato denominatore, cioè 10^n. Di più la regola testè formolata è pur quella stessa ivi stabilita; poichè l'aggiungere zeri al numeratore vale moltiplicarlo pel denominatore 10^n della nuova frazione. Quindi è che dal teorema ivi dimostrato si deduce il seguente

344. — ***Teorema.*** *Affinchè una frazione irreduttibile* $\frac{a}{b}$ *si possa trasformare in una frazione decimale equivalente, è necessario e sufficiente che il suo denominatore non abbia fattori primi differenti dal 2 e dal 5.*

Di fatti, perchè la conversione si possa fare, è necessario e sufficiente che $a \times 10^n$ sia divisibile per b; ora poichè a è

primo con b, l'espressione $a \times 10^n$ sarà divisibile per b se b divide 10^n (235), e non sarà tale nel caso contrario (251). Ma 10^n non contenendo altri fattori che 2 e 5, bisogna e basta, affinchè sia divisibile per b, che questo contenga i soli fattori primi 2 e 5 (251).

345. — ***Frazioni periodiche.*** Se la condizione del teorema precedente non è adempita, l'applicazione della regola (342) conduce a risultati particolari, cui fa d'uopo esaminare.

Riducendo in decimali le frazioni $^1/_3$, $^6/_{11}$, $^{218}/_{925}$ si ottiene

$$^1/_3 = 0{,}3333...; \quad ^6/_{11} = 0{,}5454...; \quad ^{218}/_{925} = 0{,}23.567.567...,$$

in cui si veggono comparire periodicamente le medesime cifre, senza poter mai esprimere in decimali il valore esatto della frazione ordinaria. Ora:

Le frazioni decimali, in cui certe cifre si riproducono costantemente nello stesso ordine, diconsi **frazioni periodiche;** ed il complesso delle cifre *ricorrenti* si chiama **periodo.**

346. — Le frazioni decimali periodiche possono presentarsi sotto varie forme:

1° Quando la prima o le due, tre, quattro,... prime cifre partendo dalla virgola, si riproducono costantemente nel medesimo ordine (come nel 1° e 2° esempio), la frazione decimale prende il nome di **periodica semplice.**

2° Quando il periodo non si manifesta se non dopo un certo numero di cifre (come nell'ultimo esempio), la frazione chiamasi **periodica mista.**

347. — ***Teorema.*** *Qualunque frazione ordinaria irreduttibile* $\frac{a}{b}$, *il cui denominatore* b *contenga fattori diversi dal* 2 *e dal* 5 *dà luogo ad una frazione decimale periodica.*

In fatti, applicando a tale frazione la regola prescritta, ciascun dividendo parziale lascierà un resto (345). Or tali resti essendo tutti minori del divisore b, il numero dei resti differenti è *al più* $b - 1$. Perciò dopo aver ottenuto al quoto $b - 1$ cifra, *al più*, ricomparirà uno dei resti già ottenuti; e quindi i dividendi parziali successivi riproducendosi nello stesso ordine, si riprodurranno pure nello stesso ordine le cifre del quoto.

348. — ***Corollario.*** *Nelle frazioni periodiche, il numero delle cifre del periodo è sempre minore del denominatore della frazione ordinaria da cui proviene la periodica.*

349. — La frazione ordinaria da cui proviene una frazione decimale chiamasi **generatrice** di questa. La frazione decimale dicesi **limitata** o **illimitata** secondo che il numero delle cifre che la compongono è finito o indefinito.

Nel primo caso essa è equivalente alla sua generatrice; nel secondo rimane sempre inferiore alla generatrice; accostandosi però alla medesima a mano mano che si considera un maggior numero di cifre decimali. Gli è perciò che in questo caso si dice essere la generatrice il *limite* verso il quale tende la frazione decimale.

Riduzione delle Frazioni decimali in ordinarie.

350. — Siccome ogni frazione ordinaria può ridursi in frazione decimale, così reciprocamente, ogni frazione decimale si può ridurre in frazione ordinaria; cioè si può *trovare la sua generatrice.*

Questa riduzione presenta tre casi: perchè la frazione decimale può essere *limitata* od *illimitata;* e se è illimitata, può essere periodica *semplice* o periodica *mista.*

351. — ***Generatrice d'una frazione limitata.*** Venga proposto di trovare la generatrice della frazione limitata 0,625.

Chiamando x la generatrice richiesta, si ha

$$x = 0{,}625.$$

Sopprimendo la virgola nel secondo membro e moltiplicando il primo per lo stesso numero pel quale venne moltiplicato il secondo, cioè per 1000, risulta

$$1000x = 625, \text{ donde } x = \frac{625}{1000}. \text{ Dunque:}$$

Teorema. — *La frazione ordinaria, generatrice d'una frazione decimale limitata, ha per numeratore il complesso delle cifre decimali; e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali.*

La frazione ottenuta si riduce a $^5/_8$; si ha dunque

$$0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}.$$

Si otterrebbe pure $0{,}0075 = \frac{75}{10000} = \frac{3}{400}$.

352. — ***Corollario.*** *Il denominatore d'una frazione irreduttibile generatrice d'una frazione limitata, contiene almeno uno dei fattori 2 e 5 elevato ad una potenza indicata dal numero delle cifre decimali.*

In fatti, prima che la generatrice sia ridotta a' minimi termini, il suo numeratore essendo il complesso delle cifre decimali, può supporsi non terminare con zero; quindi esso non è multiplo di 10, e perciò contiene al più uno dei fattori 2 e 5.

D'altra parte, il denominatore è divisibile per 10 elevato alla potenza indicata dal numero delle cifre decimali; esso perciò

contiene ciascuno dei fattori 2 e 5 elevato a questa stessa potenza.

Dunque nel ridurre ai minimi termini la generatrice, il suo denominatore conserverà uno almeno dei fattori 2 e 5 con un esponente precisamente uguale al numero delle cifre decimali.

353. — ***Generatrice d'una frazione periodica semplice.*** Proponiamoci di trovare la generatrice di 0,636363.....

Rappresentando con x la cercata generatrice, si ha

$$x=0,636363.....$$

quindi trasportando la virgola dopo il primo periodo, e moltiplicando il primo membro per lo stesso numero pel quale risultò moltiplicato il secondo, si ottiene

$$100x=63,\ 636363.....;$$

Da quest'equazione sottraendo la prima, risulta
$100x-x=63,636363.....-0,636363.....$, ossia $99x=63$, donde

$x=\frac{63}{99}$. Dunque:

Teorema. — *La frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica semplice, ha per numeratore il periodo, e per denominatore un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo.*

La generatrice così ottenuta si può quindi ridurre a' minimi termini, se il numeratore di essa è divisibile per 3 o per 9, ovvero talora per 11, 111, ecc. Quella testè ottenuta si riduce a $^7/_{11}$.

Dunque $0,636363.....=\frac{63}{99}=\frac{7}{11}$.

Si ottiene pure $0,762376237623.....=\frac{7623}{9999}=\frac{847}{1111}=\frac{77}{101}$.

354. — ***Corollario.*** *Il denominatore d'una frazione irreduttibile, generatrice di una frazione periodica semplice, non contiene i fattori primi 2 e 5.*

In fatti, prima che la generatrice sia ridotta a' minimi termini, tutte le cifre componenti il suo denominatore sono de' 9; esso perciò non è divisibile nè per 2 nè per 5; e nel ridurre la frazione, si sopprimono dei fattori ne' suoi termini, ma non se ne aggiunge veruno.

355. — ***Generatrice d'una frazione periodica mista.*** Cerchiamo finalmente la generatrice di 0,26851851.

Rappresentando con x la richiesta generatrice, si ha

$$x=0,26851851.....;$$

Quindi trasportando la virgola successivamente innanzi e dopo

il primo periodo, e moltiplicando ciascuna volta il primo membro pel numero stesso per cui risultò moltiplicato il secondo, si ottengono le due equazioni

$$100x=26{,}851851\ldots\ldots \text{ e } 100000x=26851{,}851851\ldots\ldots,$$

le quali sottratte l'una dall'altra dànno

$$100000x-100x=26851{,}851851\ldots-26{,}851851\ldots,$$

ossia $99900x=26851-26$, donde

$$x=\frac{26851-26}{99900}.$$ Dunque:

Teorema. — *La frazione ordinaria generatrice d'una frazione periodica mista, ha per numeratore il numero formato dalla parte non periodica seguita da un periodo, diminuito della parte non periodica; e per denominatore il numero espresso da tanti 9, quante sono le cifre del periodo, seguite da tanti zeri, quante sono le cifre non periodiche.*

La frazione precedente si reduce a $\frac{26825}{99900}=\frac{1073}{3996}$.

Dunque si ha $0{,}26851851\ldots=\frac{1073}{3996}$.

Si ottiene similmente $0{,}527373=\frac{5273-52}{9900}=\frac{5221}{9900}$.

356. — **Corollario.** *Il denominatore di una frazione irreduttibile, generatrice d'una frazione periodica mista, contiene almeno uno de' fattori 2 e 5 elevato ad una potenza indicata dal numero delle cifre non periodiche.*

Di fatti, prima che la generatrice sia ridotta a' minimi termini, il suo numeratore non può terminare con zero; giacchè si richiederebbe, affinchè ciò avesse luogo, che l'ultima cifra della parte non periodica fosse la stessa dell'ultima cifra del periodo. Ora ciò non può essere, perchè in tal caso il periodo comincerebbe realmente un posto prima di quello che si è supposto.

Il numeratore adunque, non potendo finire con zero, non è divisibile per 10, e quindi non può contenere se non uno de' fattori 2 e 5.

D'altra parte il denominatore è divisibile per 10 elevato alla potenza indicata dal numero delle cifre non periodiche; esso perciò contiene ciascuno dei fattori 2 e 5 elevato a questa stessa potenza.

Dunque nel ridurre a' minimi termini la generatrice, il suo denominatore conserverà uno almeno de' fattori 2 e 5, con un esponente precisamente uguale al numero delle cifre della parte non periodica.

Osservazione. — In tutti e tre i precedenti casi, se colla frazione decimale sonovi interi, si converte prima la frazione in ordinaria, e questa si aggiunge poi agl'interi; *Esempio:*

$$14{,}4272727\ldots=14+0{,}4272727\ldots=14+\frac{427-4}{990}=14\,{}^{47}/_{110}.$$

357. — ***Come si possa conoscere a priori la natura d'una frazione decimale.*** Dal teorema (344) e dai corollari (352, 354, 356), risultano le tre seguenti proposizioni:

1° *Una frazione ordinaria irreduttibile, il cui denominatore non contiene altri fattori primi che 2 e 5, genera una frazione decimale limitata; ed il numero delle cifre decimali di questa è uguale al maggior numero di volte che il 2 o il 5 entra come fattore nel denominatore di quella.*

2° *Una frazione ordinaria irreduttibile, il cui denominatore non contiene nè il fattore 2, nè il fattore 5, genera una frazione decimale periodica semplice.*

3° *Una frazione ordinaria irreduttibile, il cui denominatore contiene almeno uno dei fattori 2 o 5, insieme con altri fattori primi, genera una frazione decimale periodica mista; ed il numero delle cifre che precedono il periodo è uguale al maggior numero di volte che il 2 o il 5 entra come fattore nel denominatore.*

358. — ***Osservazione generale sulle frazioni.*** Essendo più facile ordinariamente l'effettuare i calcoli sopra frazioni decimali che non sopra frazioni ordinarie, queste soglionsi adoperare soltanto quando si vogliono avere risultati esatti, il che non può sempre ottenersi colle frazioni decimali. Si voglia, per esempio, conoscere il valore esatto dell'espressione

$$\frac{12{,}50+3{,}666...-0{,}8333...}{0{,}2666.....}$$

Col ridurre le frazioni decimali in ordinarie, si ottiene

$$\frac{12\,{}^1\!/_2+3\,{}^2\!/_3-{}^5\!/_6}{{}^4\!/_{15}}=\left(12+\frac{1}{2}+3+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)\frac{15}{4}=\left(15+\frac{1}{3}\right)\frac{15}{4}$$

$$=\frac{225}{4}+\frac{5}{4}=\frac{230}{4}=\frac{115}{2}=57{,}50.$$

Se in una medesima operazione concorrono frazioni ordinarie e frazioni decimali, fa d'uopo generalmente convertirle tutte o in decimali, o in ordinarie.

Esercizi

sulla Riduzione delle frazioni decimali in ordinarie, e sulle frazioni periodiche.

158. Si convertano in decimali le seguenti frazioni ordinarie: ${}^7\!/_8$, ${}^9\!/_{10}$, ${}^{15}\!/_{24}$, ${}^9\!/_{20}$ e ${}^{45}\!/_{360}$.

159. Cercare la generatrice delle seguenti frazioni limitate: 0,45; 0,784; 0,0125; 0,00256; 0,0001024.

160. Ridurre la frazione 0,24 in *dodicesimi* e 0,59 in *sesti*; sommare quindi le nuove frazioni, e dire la differenza tra questa somma e quella delle due frazioni proposte.

161. Qual è la somma delle differenze rispettive tra le frazioni: 0,34; 0,234; 0,0503; 0,00564 e queste medesime frazioni ridotte: la 1ª in terzi, la 2ª in quinti, la terza in centesimi e la 4ª in millesimi?

162. Cerchisi la generatrice delle seguenti frazioni periodiche semplici: 0,36.36...; 0,135.135...; 0,555...; 0,444...; 0,333...; 0,222...; 0,81.81.81...; 0,888...; 0,09.09.09.....

163. Calcolare l'esatta somma delle nove precedenti frazioni.

164. Da qual frazione ordinaria proviene ciascuna delle seguenti periodiche miste: 0,1.65.65.65.....; 0,4666.....; 0,02666.....; 0,1458333.....; 0,803.571428.571428.....; 0,0267.857142.857142..... ?

165. Qual è l'esatto prodotto delle sei precedenti frazioni?

166. Si calcoli l'esatto valore dell'espressione

$$\frac{4{,}555\ldots+2{,}777\ldots-0{,}45333\ldots}{0{,}54666\ldots+0{,}777\ldots-0{,}02666\ldots}.$$

167. Quali sono tra le frazioni $^{14}/_{20}$, $^{3}/_{7}$, $^{6}/_{25}$, $^{9}/_{12}$, $^{5}/_{13}$, $^{16}/_{36}$, $^{33}/_{40}$ e $^{28}/_{35}$, quelle che darebbero origine ad una frazione periodica?

168. Tra le precedenti frazioni alcune danno origine a frazioni limitate; quante cifre decimali avrebbe ciascuna di esse?

169. Date le frazioni $^{15}/_{64}$, $^{13}/_{104}$, $^{2}/_{5}$, $^{80}/_{96}$, $^{5}/_{14}$, $^{11}/_{121}$ e $^{3}/_{100}$, fra le quali alcune danno origine a frazioni limitate, altre a frazioni periodiche, si determini quante cifre decimali avrà ciascuna delle prime, ed in ciascuna delle seconde quante cifre al più potrà contenere il periodo.

Problemi di Ricapitolazione sulle frazioni.

170. Gandolfo comprò una lega composta di 2 parti di piombo da ll. 0,70 il Cg. e di 8 parti di stagno da ll. 4,80; nel rivenderla ei guadagna $^{1}/_{20}$ del prezzo di compra. Trovisi qual guadagno faccia su 599 chilogrammi.

171. Nella fusione di un vaso entrano Cg. 1 $^{1}/_{2}$ di stagno e Cg. $^{3}/_{4}$ di piombo; cerchisi quanto di ciascun metallo contengano i $^{2}/_{5}$ d'un Cg. della lega.

172. Per vestire un battaglione occorrerebbero m. 1800 di panno largo $^{6}/_{4}$ di m.; ma non trovandosene di tal larghezza, se ne comprano m. 2000 di altra specie. Qual n'è la larghezza?

173. Se 15 Cg. di pepe costano quanto 11 di garofano, dicasi il valore di 10 Cg. di pepe, sapendo che 80 di garofano si pagano 240 lire.

174. Quanti chilogrammi di colbato, pagato ll. 9 ogni 5 Cg., bisogna rivendere a ll. 13 ogni 7 per guadagnare ll. 46,30?

175. Dopo venduti i $^{4}/_{7}$ delle melarance da me comprate, se ne aggiungo 38 al resto, il numero primitivo aumenta di $^{1}/_{3}$. Quanto spesi pagandole ll. 2,40 la dozzina?

176. I $^{3}/_{4}$ più $^{2}/_{9}$ del valore di 15 Cg. d'asello, aumentati

di ll. 8, superano detto valore di ll. 7,50; qual è il prezzo del chilogramma?

177. Un canestro di melarance venne diviso fra tre persone; la 1ª ne prese i $^2/_5$ più 6, la 2ª $^1/_3$ del resto più 9, e la 3ª le rimanenti in numero di 31. Quante melarance erano in tutto, e quante ne ebbe ciascuna delle due prime persone?

178. Pasquale vendè grano a ll. 16,50 l'El.: *A* ne prese i $^7/_{24}$, *B* i $^4/_9$, *C* i $^7/_{36}$; *D*, che comprò il resto, ne avrebbe avuto $^1/_8$ se ne avesse preso per ll. 66 di più. Dicasi quanto ricevette il venditore, e quanti El. di grano possedeva.

179. Con 18 ll. di più pagherei una compra di zuccaro a ll. 1,80 il Cg. e con ll. 17 di meno ne pagherei solo i $^4/_9$; quanto ho, e qual è il peso dello zuccaro?

180. Faustino guadagnò, il 1° anno certa somma, il 2° solo i $^5/_9$ della medesima, ed il 3° perdette i $^2/_7$ di quanto guadagnò nel 2°. Qual fu il guadagno del 1° anno, se il benefizio totale fu di ll. 6652,80?

181. Con ll. 1275 comprai zuccaro, caffè e cioccolatte; se pel caffè e pel cioccolatte pagai somme superiori al valore dello zuccaro rispettivamente dei $^7/_3$ e dei $^2/_3$ del medesimo, dicasi quanto mi costasse ciascuna merce.

182. Gervasio spese ll. 197,50 in due qualità d'acquavite, pagando la migliore ll. 2,10 il litro, e l'altra ll. 1,35; quanti litri n'ebbe egli d'ogni specie, se i $^5/_7$ della somma sborsata per la 1ª superano di ll. 7,47 i $^3/_4$ dell'altra?

183. Vendendo quantità uguali di due specie di panno, ricevetti ll. 1998 per 222 m.; qual è il prezzo d'un metro d'ogni qualità, se 11 metri della 2ª costano quanto 7 della prima?

184. Ippolito comprò merce a ll. 1,25 il Cg.; ne rivendè $^1/_3$ a ll. 1,30, $^1/_4$ a ll. 1,41, i $^2/_7$ a ll. 1,32, e sul resto perdè ll. 0,05 il Cg. Di quanti chilogrammi fu la sua compra, se in tutto guadagnò ll. 8835?

185. Isaia pagò una pezza di tela *batista* ll. 20 il m.; volendovi guadagnare ll. 165, ne rivende $^1/_2$ a ll. 24 il m., $^1/_6$ a 20 ll., $^1/_4$ a 27 ll., ed il resto a ll. 30. Di quanti metri era la pezza?

186. Comprai gomma a ll. 6,60 il Cg. e voglio guadagnare su 13 Cg. il prezzo di vendita di uno; dicasi a quanto dovrò venderla.

187. Enrichetto dà al fratellino $^1/_2$ delle sue noci più $^1/_2$ di una, alla sorella la $^1/_2$ del resto più $^1/_2$ di una, ed al cugino $^1/_2$ del 2° resto più $^1/_2$ di una. Dopo ciò tutte le noci sono distribuite e nessuna venne spezzata; quante erano?

188. Dividasi il numero 178 in tre parti tali, che 8 volte la 3ª sia uguale ad $^1/_6$ della 2ª e ad $^1/_5$ della prima.

189. Manasse avendo comprato i $^7/_8$ d'una pezza di panno a ll. 56,50 il m., rivende per ll. 3300 i $^9/_{10}$ della compra; in tal guisa guadagna ll. 136 oltre il panno rimastogli. Di quanti metri era la pezza, e qual fu il guadagno totale?

190. Con ll. 1210 Eustachio compra pecore, pagandone $^1/_3$ a ll. 18 l'una, $^1/_4$ a ll. 20, ed il resto a ll. 22; quante erano?

191. Dodici eredi, formanti tre famiglie, dividonsi in parti uguali la somma di ll. 111891, per modo che la 1ª ne ha $^1/_3$, la 2ª i $^7/_8$ dei $^6/_7$ dei $^5/_6$ dei $^4/_5$, e la terza il rimanente. Di quanti membri componevasi ogni famiglia?

192. Spesi i $^3/_4$ del mio danaro, poi $^1/_3$ del resto, quindi $^1/_4$ del nuovo resto, e mi rimasero 6 ll. Quanto aveva?

193. Ubaldo e Vigiglio pagano l'entrata del vino lasciandone una parte all'esattore del dazio: il 1° su 64 botti ne lascia 5, e paga inoltre ll. 40; il 2° su 20 botti della stessa qualità ne lascia 2, e riceve ll. 40. Quanto fu stimata ogni botte?

194. Quattro persone spartironsi ll. 594: se avessero avuto rispettivamente, la 1ª $^1/_2$, la 2ª $^1/_4$, la 3ª $^1/_7$ e la 4ª $^1/_9$ di quanto ebbero in realtà, le parti sarebbero state uguali. Quanto toccò a ciascuna?

195. Si chiede quanti salti dovrà fare un cane per raggiungere una lepre che già ne ha fatti 80, sapendo che mentre il cane fa 2 salti la lepre ne fa 3, e che cinque di questi valgono 2 di quelli.

§ 9° — VALUTAZIONE APPROSSIMATA della quantità e dei numeri.

359. — Valutare una quantità *a meno* d'un'unità, d'un decimo, d'un centesimo, d'un quinto, ecc., significa trovare un numero che esprima il valore di questa quantita con un *errore minore* d'un'unità, d'un decimo, ecc.

Supponiamo che una lunghezza A si misuri col metro, e si trovi che essa lo contenga 24 volte, con un resto B minore di un metro: se questo resto si trascura, si avrà il valore della quantità *A a meno di un'unità*, cioè d'un metro. Se poi il resto B, che non contiene più il metro, si paragona col decimetro, e si trova che esso contiene, p. es. 8 decimetri, con un resto C minore di un decimetro; il valore di A sarà 24,8 *a meno d'un decimetro*. Il resto C potrà paragonarsi col centimetro, e supponendo che lo contenga 5 volte con un resto D, il valore di A sarà 24,85 *a meno d'un centimetro*.

Continnando così a paragonare ciascun resto con una parte dell'unità sempre più piccola, si ottengono dei numeri successivamente più *prossimi* al valore della quantità proposta. Questi numeri sono dunque *valori approssimati* di tale quantità.

360. — ***Osservazione.*** Supponendo che il resto D contenga esattamente 4 volte il millimetro, il numero 24,854 sarebbe il valore esatto della quantità A. In questo caso il millimetro essendo contenuto un numero esatto di volte e nell'unità

(il metro) e nella quantità da misurarsi, dicesi la loro **comune misura,** e la quantità *A* si chiama **commensurabile.** Per l'opposto una quantità si dice **incommensurabile** quando non ha coll'unità veruna comune misura.

Risulta da ciò, che il valore di una quantità incommensurabile non può venire espresso esattamente con nessun numero nè intero, nè frazionario; giacchè se potesse esprimersi con un numero intero, la quantità avrebbe per misura comune coll'unità, l'unità stessa; e se potesse esprimersi con una frazione, per esempio $^5/_7$, la parte $^1/_7$ sarebbe misura comune alla quantità ed all'unità.

Convien però avvertire, che una quantità non è incommensurabile, perchè il suo valore non possa esprimersi esattamente con frazione decimale. Nel precedente esempio, v. g., la quantità *A* non può contenere un numero esatto di volte nè il *decimetro*, nè il *centimetro*, nè il *millimetro*, ecc.; ma sì bene il *terzo*, il *settimo* od il *quindicesimo*, ecc., del metro. Tutte le generatrici delle frazioni periodiche rappresentano quantità commensurabili, le quali ciò nulla meno non possono esprimersi in frazioni decimali.

Vedremo nel capo seguente esempi di quantità incommensurabili.

361. — Allorchè invece del vero valore d'una quantità si prende un valore approssimato, l'errore che si commette può essere per **difetto** o per **eccesso.** Così nell'esempio testè recato, il numero 24,854 essendo il valore esatto della quantità *A*, se si prende il valore approssimato 24,85 si commette un errore per *difetto* uguale a 0,004; se invece si prende 24,86 l'errore commesso è per *eccesso* ed uguaglia 0,006. I numeri 24,85 e 24,86 sono pertanto due *limiti*, fra i quali è compreso il valore di *A*, ed entrambi rappresentano questo valore *a meno di* 0,01.

362. — ***Teorema.*** *Un'unità decimale di qualsivoglia ordine è sempre maggiore della somma di tutti i decimali che la seguono.*

Sia la frazione decimale 0,486...; dico che qualunque sia il numero delle cifre che seguono il 6, il loro complesso sarà sempre minore di un millesimo.

Per rendere chiara questa verità basta provare che 0,4869999... è minore di 0,487; or ciò è vero, poichè la frazione 0,4869999 deve aumentare di 0,0000001 per divenire uguale a 0,487, come si vede qui accanto. Dunque 0,0009999 è minore di 0,001.

0,4869999	
0,0000001	
0,4870000...	

363. — ***Approssimazione d'un numero decimale a meno d'un'unità di qualsivoglia ordine.*** Cerchiamo il valore del numero 47,63782048 a meno di 0,01.

1° Tutte le cifre che seguono il 3 costituiscono un numero minore di 0,01 (n° ant.); se dunque le sopprimiamo, le rimanenti 47,63 esprimeranno a meno di 0,01 per *difetto*, il valore del numero proposto.

2° Poichè il numero 47,63782048 uguaglia 47,63 più qualche cosa minore di 0,01 se si prende 47,63+0,01, ossia 47,64, questo nuovo numero sarà bensì maggiore di 47,63782048, ma lo supererà d'una quantità minore di 0,01. Dunque 47,64 esprime a meno di 0,01 per *eccesso*, il valore del numero proposto.

Regola. — *Per avere il valore di un numero decimale a meno di un'unità di qualsivoglia ordine, si sopprimono tutte le cifre degli ordini inferiori a quello: le cifre che rimangono esprimono il valore richiesto per* difetto; *il valore per* eccesso *si ottiene aumentando d'un'unità l'ultima delle cifre conservate.*

364. — **Osservazione.** Se la prima (a sinistra) delle cifre soppresse è minore di 5, il valore per difetto è approssimato a meno di una *mezza unità* dell'ultimo ordine conservato; se poi la medesima cifra è maggiore, od uguale a 5, egli è il valore per eccesso che gode della detta approssimazione. Questa verità deriva dal teorema del n° 362.

Perciò quando non si conservano tutte le cifre decimali esprimenti un numero, si suol prenderne il valore per *difetto* o per *eccesso* secondo che la prima cifra tralasciata è minore o maggiore di 5.

365. — **Approssimazione d'un numero frazionario a meno di un'unità.** Cerchiamo il valore di $^{357}/_{13}$ a meno d'un'unità.

Estraendo gl'interi contenuti in quest'espressione si trova $27+{}^{6}/_{13}$; il numero proposto è dunque compreso tre 27 e 28.

Regola. — *Per avere il valore d'un numero frazionario a meno d'una unità si estraggono gl'interi in esso contenuti: questi esprimono il valore richiesto per* difetto; *il valore per* eccesso *si ottiene aumentando i medesimi interi d'un'unità.*

366. — **Osservazione.** I valori per difetto e per eccesso sono rispettivamente approssimati a meno d'una *mezza unità*, secondo che il resto della divisione è minore o maggiore della metà del divisore.

367. — **Approssimazione d' un numero frazionario a meno di una parte d'unità.** Proponiamoci ora di trovare a meno di $^{1}/_{15}$ il valore del numero precedente, cioè $^{357}/_{13}$.

Riducendo la frazione $^{357}/_{13}$ in quindicesimi secondo la regola del N. 337, si trova $^{411}/_{15}$ più $^{12}/_{13}$ di $^{1}/_{15}$; dunque essa è compresa fra $^{411}/_{15}$ e $^{412}/_{155}$.

Regola. — *Per valutare un numero frazionario a meno di* $\frac{1}{m}$ *lo si converte in una frazione il cui denominatore sia* m: *se* n *è il maggior numero di* m^esimi *il limite per* difetto *sarà* $\frac{n}{m}$ *e quello per eccesso* $\frac{n+1}{m}$.

§ 10° — OPERAZIONI ABBREVIATE
con approssimazione fino ad una data cifra decimale.

368. — Nel più de' casi non si cerca il risultato esatto di un calcolo, bastando in pratica di ottenere un valore sufficientemente vicino al vero. Perciò dopo dimostrato come si valuti approssimativamente qualsivoglia numero, esporremo i metodi per ottenere con determinata approssimazione i risultati delle quattro operazioni dell'aritmetica.

Adopreremo esclusivamente le frazioni decimali essendo l'uso di esse ne' calcoli per approssimazione assai più facile e più uniforme che non quello delle frazioni ordinarie.

369. — ***Addizione.*** Proponiamoci di ottenere a meno di 0,01 il totale de' numeri seguenti:

2,3487434; 5,0457845; 1,7848532; 3,7853453.

Prendendo in ciascun numero solamente tre cifre decimali, cioè il valore per difetto a meno di 0,001, si ha da fare l'addizione qui accanto, il cui risultato è 12,962. Ora siccome l'errore su ciascun numero è minore di 0,001 e i numeri sono meno di 10, così sulla somma 12,962 esso è minore di 10 millesimi, ossia di 0,01. Questo errore essendo per difetto, se, per attenersi ai soli centesimi, si sopprimono i 2 millesimi, un nuovo errore per difetto si aggiunge al primo, il che può dare un errore totale per difetto maggiore di 0,01. Sicchè la somma 12,96 può non avere la voluta approssimazione. Ma se la cifra 6 de' centesimi si aumenta d'un'unità, la somma 12,962 viene aumentata di 8 millesimi.

2,348
5,045
1,784
3,785
12,962

Dunque, prendendo 12,97 per la somma de' numeri proposti, si commettono due errori, l'uno per difetto, l'altro per eccesso; essi pertanto si compensano in parte, ed essendo entrambi minori di 0,01, l'errore finale, che n'è la differenza, sarà pure minore di 0,01. Quest'errore potrà essere per difetto o per eccesso.

Da ciò s'inferisce la seguente

Regola. — *Per ottenere la somma di più numeri interi o decimali a meno d'un'unità d'un ordine dato, bisogna:*

1° *Se i numeri da sommarsi sono meno di dieci, valutare ciascuno di essi, per difetto, a meno d'un'unità dell'ordine immediatamente inferiore a quello che esprime il grado di approssimazione richiesto; fare la somma dei numeri approssimati; sopprimere l'ultima cifra a destra del risultato, ed aumentare d'un'unità l'ultima cifra conservata.*

2° *Se i numeri da sommarsi sono più di dieci e meno di cento, valutare ciascuno di essi, per difetto, a meno d'un'unità del* secondo *ordine inferiore a quello che esprime, ecc.*

370. — ***Sottrazione.*** Venga proposto di determinare a meno di 0,01 la differenza fra i numeri

9,3784213 e 4,4578987.

Valutando ciascun numero a meno di 0,01, per difetto, e sottraendo i risultati, si ottiene per differenza 4,921.

$$\begin{array}{r} 9{,}37 \\ 4{,}45 \\ \hline 4{,}92 \end{array}$$

Ora, il minuendo essendo troppo piccolo produsse su questa differenza un errore per difetto; il sottraendo essendo pure troppo piccolo produsse sulla medesima un errore per eccesso.

Questi due errori si compensano dunque in parte; ed essendo entrambi minori di 0,01, l'errore finale sarà altresì minore di 0,01. Tal errore potrà essere per difetto o per eccesso.

Da ciò s'inferisce la seguente

Regola. — *Per ottenere la differenza di due numeri a meno d'un'unità di un ordine dato, si valuta ciascuno di essi, per difetto, a meno d'un'unità di quest'ordine, e si prende la differenza dei due valori approssimati.*

371. — ***Moltiplicazione.*** Tratteremo da prima il caso in cui il moltiplicatore consta di una sola cifra; ciò fatto riuscirà facile intendere il metodo generale.

Cerchiamo dunque, a meno di 0,001, il prodotto di 457,98639258716 per 8.

Il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicando per 8 (unità semplici) esprime unità dell'ordine medesimo della cifra moltiplicata. Ciò posto, si tratta di sapere da quale cifra del moltiplicando si debba incominciare l'operazione, ossia con qual grado d'approssimazione si debba valutare il moltiplicando.

Ora, la cifra del moltiplicatore essendo al più uguale a 9, basterà prendere il moltiplicando a meno di 0,0001 per difetto; giacchè in tal caso l'errore commesso, moltiplicato per la cifra del moltiplicatore, risulta minore di 0,001. Dunque basta incominciare l'operazione dalla cifra dei diecimillesimi, come se il moltiplicando fosse 457,9863. Il che dà per prodotto 3663,8904, con un errore in difetto minore di 0,001.

$$\begin{array}{r} 457{,}9863 \\ 8 \\ \hline 3663{,}8904 \end{array}$$

372. — ***Osservazione.*** Se la cifra moltiplicatrice rappresentasse decine, centinaia, ecc., l'errore commesso sul moltipli-

cando potrebbe venire moltiplicato per 90, per 900, ecc.; perciò bisognerebbe cominciare l'operazione uno, due, tre,... ordini più a destra.

Reciprocamente, se la suddetta cifra rappresentasse decimi, centesimi, ecc., l'errore verrebbe diviso; perciò basterebbe principiare la moltiplicazione uno, due, tre,... ordini più a sinistra.

373. — Proponiamoci ora di trovare, a meno di 0,01, il prodotto dei numeri 457,98639258716 e 68,4532419734.

Poichè la moltiplicazione si termina col fare l'addizione dei prodotti parziali, basterà (se questi prodotti non sono più di dieci), ottenere ciascuno di essi a meno di 0,001 per difetto (369).

Ora, per ciò che dicemmo nel caso precedente, i prodotti parziali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore si ottengono a meno di 0,001 nel modo seguente:

Il prod. per le *decine*, cominciando dai *centomillesimi* del molt.do
» » *unità* » » *decimillesimi* »
» pei *decimi* » » *millesimi* »
» » *centesimi* » » *centesimi* »
» » *millesimi* » » *decimi* »
» » *decimillesimi* » dalle *unità* »
» » *centomillesimi* » » *decine* »

Per facilitare l'operazione, si suole scrivere il moltiplicatore in senso inverso, come qui contro, per modo che ciascuna delle cifre del medesimo si trovi sotto la cifra del moltiplicando dalla quale deve cominciare l'operazione parziale.

Ciascun prodotto parziale esprimendo dei decimillesimi, la loro somma 313506507 esprime pure dei decimillesimi. Si aumenta pertanto di un'unità (369) la cifra 5 dei centesimi e si sopprimono le due ultime; cosicchè il prodotto richiesto è 31350,66.

	457986392587 16
	437914235486
	274791834
	36638904
	1831944
	228990
	13737
	914
	180
	4
	313506507

Notisi che le sei ultime cifre del moltiplicando e le quattro ultime del moltiplicatore non vennero adoperate nell'operazione, quindi si poteva non iscriverle.

In conseguenza dei fatti ragionamenti si può formolare la seguente

Regola. — *Per ottenere il prodotto di due numeri a meno d'un'unità d'un ordine dato:*

Si scrive il moltiplicatore invertito *sotto il moltiplicando, in guisa che la cifra delle unità si trovi sotto quella che esprime unità* cento *volte minori delle unità indicanti l'approssimazione voluta;*

Si fanno le moltiplicazioni parziali incominciando per ciascuna solamente dalla cifra del moltiplicando, la quale corrisponde a quella del moltiplicatore che in questa operazione parziale si adopera;

Si fa la somma dei prodotti; si sopprimono le ultime due cifre, e si aumenta d'un'unità l'ultima cifra conservata;

Si pone al risultato una virgola, se occorre, per modo che l'ultima cifra a destra esprima unità dell'ordine indicante la voluta approssimazione.

Osservazione. — Se le cifre del moltiplicatore, adoperate nell'operazione, fossero più di dieci, converrebbe prenderne una di più alla destra del moltiplicando, e quindi sopprimerne tre nella somma de' prodotti.

374. — ***Divisione.*** Per abbreviare la divisione, si cercò naturalmente d'invertire il metodo tenuto nella moltiplicazione abbreviata; ma siccome la regola che ne risultò potrebbe difficilmente dimostrarsi *a priori,* come abbiamo fatto per le tre altre operazioni, la stabiliremo di tratto, limitandoci poi a verificare il risultato dell'esempio che addurremo in applicazione della medesima.

Regola. — *Per ottenere il quoto di due numeri a meno d'un'unità d'un ordine dato:*

Si determina il numero delle cifre che aver deve il quoto;

Si forma il divisore abbreviato prendendo a sinistra del divisore dato tante cifre quante sono quelle del quoto più due, e trascurando tutte le altre;

Si forma il dividendo abbreviato prendendo a sinistra del dividendo dato tante cifre quante bastano a contenere il divisore formato, e trascurando tutte le altre;

Si divide questo dividendo pel divisore abbreviato, senza badare alle virgole, il che dà la prima cifra del quoto.

Per continuare l'operazione, si divide il resto ottenuto per un nuovo divisore, che si forma sopprimendo (*) l'ultima cifra a destra del divisore precedente; si continua così sopprimendo una cifra del divisore ad ogni divisione parziale, finchè siasi ottenuto al quoto il numero di cifre prestabilito.

Si pone al quoto una virgola se occorre, in guisa che l'ultima cifra esprima unità dell'ordine indicante la voluta approssimazione.

Esempio. Proponiamoci di trovare, a meno d'un'unità il quoto di 5384627,3548267 per 825,34826432.

Affinchè il divisore giunga a superare il dividendo bisogna trasportare la virgola di quattro ordini verso destra; il dividendo adunque contiene il divisore più di mille volte e meno di 10000. Per conseguenza il quoto avrà quattro cifre nella sua parte intera; e poichè non richiediamo decimali, il numero delle cifre del quoto sarà definitivamente *quattro*.

(*) Nell'esempio seguente le cifre soppresse nel divisore sono soprassegnate da punti.

Ciò posto, giusta la precedente regola, il divisore abbreviato si comporrà di sei cifre, e sarà 825348; il dividendo abbreviato sarà 5384627, e l'operazione si potrà disporre come segue:

divid. abbr. 5384627.3548267 | *divis. abbr.* 825.348.26432 / 6524

432539
19869
3363
63

Operazioni parziali

5384627 : 825348 = 6 *migliaia* + ...
432539 : 82534 = 5 *centinaia* + ...
19869 : 8253 = 2 *decine* + ...
3363 : 825 = 4 *unità* + ...

Dimostriamo ora che il quoto ottenuto 6524 differisce dal vero d'una quantità minore dell'unità.

Esaminando il procedimento tenuto nel fare la divisione, facilmente si scorge che il resto 63 è la differenza tra il dividendo abbreviato 5384627 ed il prodotto del divisore dato 825,34826432 pel quoto 6524; prodotto ottenuto colla regola della moltiplicazione abbreviata, a meno di 100; giacchè la moltiplicazione si fece come qui contro, ponendo la cifra delle unità del moltiplicatore sotto la cifra delle unità del moltiplicando.

825,34826432
4256
4952088
412670
16506
3300
5384564

Poichè adunque il prodotto 5384564 sottratto dal dividendo abbreviato ha dato per residuo 63, il medesimo prodotto sottratto dal dividendo dato darà per residuo totale 63,3548267. Ciò posto, facciamo per brevità:

il dividendo dato 5384627,3548267 $= D$,
il divisore dato 825,34826432 $= d$,
il quoto ottenuto 6524 $= Q$,
il resto totale 63,3548267 $= R$,
il prodotto approssimato 5384564 $= P$.

Essendo P il prodotto a meno di 100 per difetto di d per Q rappresentiamo con E l'errore; si avrà

$$P + E = dQ, \text{ donde } P = dQ - E.$$

Ma si ha pure $D - P = R$, donde $D = P + R$;
sostituendo pertanto in quest'ultima uguaglianza il valore di P, essa diventa $D = dQ + R - E$, donde

$$\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d} - \frac{E}{d}.$$

Osserviamo che il resto R è minore del divisore d, e che E essendo minore di 100, è *a fortiori* minore di d. Da ciò risulta che le due frazioni $\frac{R}{d}$ e $\frac{E}{d}$ sono minori dell'unità; quindi è pure

minore dell'unità la loro differenza. Chiamandola $\frac{1}{m}$, si avrà

$$\frac{D}{d} = Q \pm \frac{1}{m}.$$

Dunque il quoto Q, ossia 6524, differisce dal vero quoto $\frac{D}{d}$. d'una quantità $\frac{1}{m}$ minore dell'unità.

375. — ***Osservazione.*** Nel fare la divisione abbreviata col metodo sovresposto, può avvenire che un dividendo parziale contenga 10 volte il divisore corrispondente.

In tal caso si porranno al quoto tanti 9 quante cifre mancano per ottenerne il numero prestabilito.

Esercizi sulle Operazioni abbreviate.

196. Si cerchi a meno di 1000 il totale de' numeri 32897814; 157642019; 97469000; 18004967; 48957762; 1456695.

197. Calcolare a meno di 0,01 la somma dei seguenti numeri decimali: 478,7567; 95775,142387; 6789,01385; 12018,304896.

198. Qual è a meno di 0,001 la somma delle frazioni: 0,7564645; 0,1234567; 0,95018; 0,0954599; 0,364483?

199. La maggior distanza del sole dalla terra essendo Cm. 155929424, e la minore Cm. 150731578, cerchisi a meno di 1000 Cm. la loro differenza.

200. Si domanda a meno di un'unità la differenza tra 99511488,259873 e 7599397,48.

201. Trovare a meno di 0,01 la differenza tra i numeri 148765,399885 e 86675,146975.

202. Qual è a meno di 0,01 il prodotto di 1866,789125 per 365,67915?

203. Trovisi l'errore che si commette facendo, a meno di 0,01, il prodotto dei numeri 3500,285 e 194,7563.

204. Cerchisi il prodotto a meno di 0,001 di 4,789432156 per 68,25.

205. Calcolare il prodotto di 66754618,7542 per 493,24758 a meno di 10, e di 19878,136999 per 75,7 a meno di 0,01.

206. Chiedesi il quoto di 9806879 per 789673 a meno di un'unità, e di 96622585 per 2876561 a meno di 0,1.

207. Dividere 681702,5555455 per 194,7563 con errore inferiore a 0,01.

208. Qual è il quoto a meno di 0,001 di 759,1256785 per 41,364?

209. Eseguire con approssimazione a meno di 0,001 la divisione di 489953438,2187589 per 789,433650.

CAPO V.

POTENZE E RADICI

§ 1° — POTENZE E RADICI IN GENERE.

376. — ***Potenze.*** Allorchè i fattori d'un prodotto sono tutti uguali ad un medesimo numero, il prodotto chiamasi **potenza** di questo numero (99).

Così i prodotti

$9 = 3 \times 3$, $27 = 3 \times 3 \times 3$, $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$,
$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$,

sono tutti *potenze* del numero.

377. — Le potenze prendono il nome dal numero dei fattori uguali di cui sono il prodotto, dicendosi **seconda, terza, quarta, quinta**..... potenza d'un numero il prodotto di due, tre, quattro, cinque..... fattori uguali a questo numero. La seconda potenza si suol chiamare **quadrato,** e la terza **cubo.**

378. — L'ordine della potenza d'un numero s'indica coll'esponente, che è un altro numero scritto alla destra del primo ed alquanto in alto.

Così per indicare le precedenti potenze del numero 3 si scrive

3^2, 3^3, 3^4, 3^5;

e si legge: 3 *al quadrato,* 3 *al cubo,* 3 *alla quarta potenza,* ecc.; ovvero: 3 *elevato a* 2, 3 *elevato a* 3, 3 *elevato a* 4, ecc. Pertanto:

L'esponente indica quante volte deve prendersi come fattore il numero al quale viene apposto: ovvero quante volte meno una il numero deve moltiplicarsi per se stesso.

Cosicchè l'espressione a^n significa che bisognà:

elevare il numero a alla n^{esima} potenza,
ossia prendere il numero a come fattore n volte,
ossia moltiplicare a per se stesso $n - 1$ volta.

Quindi si conchiude che:

379. — La potenza n^{esima} d'un numero è il prodotto di questo numero moltiplicato $n - 1$ volta per se stesso.

380. — ***Radici.*** Allorchè un numero è una potenza di un altro, quest'altro dicesi **radice** del primo.

Così essendo i numeri 9, 27, 81, 243 potenze di 3, il 3 è radice di ciascuno di essi.

381. — Le radici prendono il nome dalla potenza alla quale vengono riferite; per esempio, il numero 3 dicesi radice **seconda** o **quadrata** di 9, radice **terza** o **cubica** di 27, radice **quarta** di 81, ecc., perchè i suddetti numeri sono rispettivamente la seconda, la terza, la quarta potenza di 3.

In generale un numero a è la n^{esima} radice di a^n; perchè a^n è la n^{esima} potenza di a.

382. — Per rappresentare la radice d'un numero, lo si scrive sotto il segno $\sqrt{}$, che dicesi **radicale.** L'ordine poi della radice viene indicato da un numero, detto **indice,** che si pone nell'apertura del radicale.

Così per indicare la radice seconda di 9, la radice terza di 27, la radice quarta di 81, si scrive $\sqrt[2]{9}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$; e poichè ciascuna di queste radici vale 3, si avrà

$$\sqrt[2]{9}=3, \qquad \sqrt[3]{27}=3, \qquad \sqrt[4]{81}=3.$$

In generale a essendo la n^{esima} radice di a^n, si ha

$$\sqrt[n]{a^n}=a.$$

Quindi si conchiude che:

383. — La radice n^{esima} d'un numero è un altro numero, il quale elevato alla n^{esima} potenza riproduce il primo.

384. — ***Osservazione.*** Per indicare la radice seconda o quadrata si suole scrivere il radicale senza indice; perciò invece di $\sqrt[2]{4}=2$, $\sqrt[2]{25}=5$, si scriverà semplicemente

$$\sqrt{4}=2, \qquad \sqrt{25}=5.$$

385. — Risulta dal sin qui detto che, oltre le quattro operazioni di cui trattammo nei capitoli precedenti, altre due se ne possono eseguire sui numeri; giacchè dato un numero, può venire proposto di trovare una potenza qualsiasi del medesimo, e reciprocamente data una potenza, si può chiedere che si trovi la radice corrispondente. Queste due operazioni diconsi **elevazione alle potenze** ed **estrazione delle radici.** La teorica compiuta di esse non appartiene all'aritmetica; ci limiteremo pertanto a trattare del quadrato e della radice quadrata, poi del cubo e della radice cubica.

§ 2° — TEORICA DE' QUADRATI
e delle Radici quadrate.

386. — Il **quadrato** d'un numero è il prodotto di questo numero moltiplicato per se stesso (379).

Così 25 è il quadrato di 5, e $a \times a$, ossia a^2 è il quadrato di a.

387. — La **radice quadrata** d'un numero è un altro numero, il quale elevato al quadrato riproduce il primo (383).

Così 5 è la radice quadrata di 25, e a la radice quadrata di a^2.

388. — ***Teorema 1°.*** *Il quadrato della somma di due numeri è uguale al quadrato del primo numero, più due volte il prodotto del primo pel secondo, più il quadrato del secondo.*

In fatti, sia $a + b$ la somma proposta. Il suo quadrato s'indica $(a + b)^2$, e per ottenerlo bisogna (386) moltiplicare la somma $a + b$ per se stessa; ora questa moltiplicazione si fa (164) come qui accanto, e dà per risultato $a^2 + 2ab + b^2$; dunque si ha

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$(1) \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

389. — ***Corollario.*** *Si può, per formare il quadrato di un numero, scomporlo in due parti, e sommare insieme i quadrati di queste parti col doppio prodotto delle medesime.*

Per esempio il quadrato di 13 si può ottenere così:

$$13^2 = (5 + 8)^2 = 5^2 + 2 \times 5.8 + 8^2 = 25 + 80 + 64 = 169,$$

ovvero

$$13^2 = (6 + 7)^2 = 6^2 + 2 \times 6.7 + 7^2 = 36 + 84 + 49 = 169,$$

ovvero

$$13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \times 10.3 + 3^2 = 100 + 60 + 9 = 169.$$

Quest'ultimo modo di scomporre il numero 13 per formarne il quadrato ci conduce a stabilire il seguente principio, dal quale poi dedurremo il metodo per l'estrazione della radice quadrata de' numeri:

Il quadrato d'un numero composto di decine e di unità è uguale al quadrato delle decine, più due volte il prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Così pel quadrato di 37 si ha

$$37^2 = (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30.7 + 7^2.$$

Si osservi che le due prime parti 30^2 e $2.30.7$, effettuando le operazioni, diventano 900 e 420, cioè la prima termina con due zeri e la seconda con uno. Da ciò risulta che:

Il quadrato delle decine dà un numero esatto di centinaia, e

il doppio prodotto delle decine per le unità dà un numero esatto di decine.

390. — **Teorema 2°.** *La differenza de' quadrati di due numeri interi consecutivi* a *e* a + 1, *è uguale al doppio del minore* a, *più* 1; *ossia* 2a+1.

In vero, il quadrato del numero minore a è a^2; in quanto al quadrato del maggiore $a+1$, esso si ottiene mediante la formola (1), facendo $b=1$; il che dà $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$. Dunque si avrà

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1.$$

391. — Il precedente teorema somministra un altro mezzo per formare il quadrato di un numero intero, quando si conosce il quadrato del numero immediatamente inferiore.

Vogliasi formare il quadrato di 11.

Il quadrato di 10 essendo 100, quello di 11 sarà

$$10^2 + 2.10 + 1 = 100 + 20 + 1 = 121.$$

Si può così formare il quadrato di quanti numeri successivi si voglia con semplici addizioni; giacchè avuto il quadrato di 11, quelli di 12, 13, 14, ecc., si otterranno così:

$$12^2 = 11^2 + 2.11 + 1 = 121 + 22 + 1 = 144,$$
$$13^2 = 12^2 + 2.12 + 1 = 144 + 24 + 1 = 169,$$
$$14^2 = 13^2 + 2.13 + 1 = 169 + 26 + 1 = 196, \text{ ecc.}$$

392. — **Teorema 3°.** *Il quadrato di un prodotto* abc *è uguale al prodotto* $a^2b^2c^2$ *de' quadrati dei singoli fattori.*

Di fatti, si ha

$$(abc)^2 = abc.abc = a.a.b.b.c.c = a^2b^2c^2.$$

Esempio $12^2 = (3.4)^2 = 3^2.4^2 = 9.16 = 144.$

393. — **Corollario.** *La radice quadrata di un prodotto è uguale al prodotto delle radici quadrate dei singoli fattori.*

In fatti, poichè *abc* elevato al quadrato dà $a^2b^2c^2$, ne risulta (187) che *abc* è la radice quadrata di $a^2b^2c^2$, e si ha $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Ma $a = \sqrt{a^2}$, $b = \sqrt{b^2}$, $c = \sqrt{c^2}$; dunque

$$\sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2}.\sqrt{c^2}.$$

Esempio $\sqrt{36} = \sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9.} = 2.3 = 6.$

394. — **Teorema 4°.** *Per elevare al quadrato la potenza d'un numero, basta raddoppiare il suo esponente.*

In vero, sia a^3 da elevare al quadrato; si ha

$$(a^3)^2 = a^3.a^3 = aaa.aaa = a^6 = a^{3.2}$$

395. — **Teorema 5°.** *I fattori primi del quadrato d'un numero intero hanno tutti un esponente pari.*

Di fatti, sia N un numero intero. Esso è scomponibile in fat-

tori primi, de' quali alcuni possono avere un esponente, ed altri esserne privi (246). Ora elevando N al quadrato, i fattori privi d'esponente acquistano l'esponente 2 (392), e gli altri acquistano un esponente doppio di quel che hanno (394).

Dunque tutti i fattori primi di N^2 hanno un esponente pari.

396. — **Corollario.** *Se il quadrato d'un numero intero è divisibile per un numero primo, sarà pure divisibile pel quadrato di questo numero primo.*

Invero, se il quadrato N^2 del numero intero N è divisibile pel numero primo d, esso contiene d con un esponente pari (n° ant.); perciò lo contiene almeno coll'esponente 2, e quindi è divisibile per d^2 (251).

397. — **Teorema 6°.** *Il quadrato d'un numero intero non può terminare per una delle cifre* 2, 3, 7, 8.

In fatti, sia N un numero intero. Chiamando n la cifra delle unità, e m il numero formato dalle altre cifre, si avrà

$$N=m.10+n\text{; e quindi (388)}$$

$$N^2=(m.10)^2+2(m.10)n+n^2=m^2.10^2+2mn.10+n^2,$$

ovvero

$$(2)\qquad N^2=m^2.100+2mn.10+n^2.$$

Da ciò si vede che le due prime parti di cui si compone il quadrato N^2 non contengono unità semplici, perchè sono entrambe multipli di 10; quindi le unità semplici del quadrato debbono provenire dalla terza parte n^2. Ma n essendo un numero d'una sola cifra, il suo quadrato non può terminare che per 0, 1, 4, 9, 6, 5; dunque n^2, e quindi N^2 non può terminare per 2, 3, 7, 8.

398. — **Teorema 7°.** *Se un numero termina per* 5, *il suo quadrato termina per* 25.

In vero, sia N un numero terminante per 5. Ponendo 5 invece di n nell'uguaglianza (2), si ha

$$N^2=m^2.100+2m.5.10+25=m^2.100+m.100+25\text{;}$$

donde appare che le due prime parti di cui si compone N^2, sono prive di decine e d'unità, essendo multipli di 100. Quindi le decine e le unità di N^2 provengono dalla terza parte, e sono perciò 2 e 5; dunque il quadrato N^2 termina per 25.

399. — **Teorema 8°.** *Se un numero termina con zeri o con cifre decimali, il suo quadrato termina con un numero doppio di zeri o con un numero doppio di cifre decimali.*

Questa verità è una conseguenza de' metodi stabiliti per fare la moltiplicazione (109-4°) e (106).

400. — **Corollario.** *Il quadrato d'un numero terminante con zeri o con cifre decimali termina con un numero pari di zeri o con un numero pari di cifre decimali.*

401. — **Teorema 9°.** *Il quadrato di una frazione è uguale*

ad un'altra frazione, i cui termini sono rispettivamente i quadrati de' termini della prima.

Di fatti, sia la frazione $\frac{a}{b}$; si avrà

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b \times b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

402. — **Corollario.** *La radice quadrata d'una frazione uguale ad un'altra frazione, i cui termini sono rispettivamente le radici quadrate de' termini della prima.*

In fatti, poichè $\frac{a^2}{b^2}$ è il quadrato della frazione $\frac{a}{b}$, questa è la radice di quella e si ha

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}.$$

403. — **Teorema 10°.** *Il quadrato d'una frazione irreduttibile è una frazione irreduttibile, i cui termini sono quadrati.*

In vero, sia $\frac{a}{b}$ una frazione ridotta a' minimi termini; il suo quadrato è $\frac{a^2}{b^2}$. Ora, essendo a primo con b, è pure a^2 primo con b^2 (238); dunque la frazione $\frac{a^2}{b^2}$ è irreduttibile, ed i suoi termini rimangono perciò i quadrati a^2 e b^2.

404. — **Corollario.** *Il quadrato di una frazione non può essere un numero intero.*

In fatti, qualunque sia la frazione, essa può supporsi ridotta a' minimi termini, e quindi il suo quadrato è una frazione, i cui termini sono primi tra loro (n° ant.); dunque il numeratore non è divisibile pel denominatore, ossia la frazione non è un numero intero.

405. — **Numeri non quadrati perfetti e radici incommensurabili.** Vi sono molti numeri interi i quali non sono il quadrato di nessun numero intero; tali sono, p. es., quelli che terminano per 2, 3, 7, 8 (397). E siccome non possono essere il quadrato d'un numero frazionario (n° ant.), ne risulta che sì fatti numeri non sono il quadrato di verun numero.

Similmente vi sono numeri frazionari, che non sono il quadrato di un numero frazionario. E giacchè tali numeri non possono essere il quadrato di un numero intero, essi non sono il quadrato di verun numero. Ora:

Un numero che non è il quadrato di nessun numero dicesi **non quadrato perfetto**, mentre gli altri sono chiamati **quadrati perfetti.**

Per es., 144 e $^{9}/_{16}$ sono quadrati perfetti, essendo i quadrati di 12 e di $^{3}/_{4}$; mentre 6 e $^{12}/_{25}$ non sono quadrati perfetti.

È chiaro, per definizione, che le radici quadrate dei numeri interi o frazionari non quadrati perfetti, non possono venire espresse nè da interi nè da frazioni. Per conseguenza le radici di sì fatti numeri sono quantità **incommensurabili** (360); e quindi il loro valore non si può ottenere esattamente, ma solo per approssimazione.

406. — Ciò premesso, i teoremi testè dimostrati conducono ai seguenti

Corollari: — **1°** *Se la radice d'un numero intero non può esprimersi con un intero, essa non può venire espressa esattamente neppure con un numero frazionario, ed è perciò incommensurabile.*

In fatti, se la radice d'un numero intero N potesse venir espressa con un numero frazionario, elevando questo al quadrato si dovrebbe ottenere il numero intiero N; il che è impossibile (404).

2° *Un numero intero non può essere quadrato perfetto, nè per conseguenza avere radice commensurabile, se esso non termina per* 1, 4, 6, 9, 25, *ovvero per un numero pari di zeri.*

Di fatti, perchè un numero intero sia quadrato perfetto N^2, bisogna che esso sia il quadrato d'un numero *intero* N.

Ora, se N termina con zeri, N^2 termina con un numero pari di zeri (400); e se N finisce con una cifra significativa, N^2 deve terminare con 1, 4, 6, 9, ovvero con 25 (397, 398).

3° *Un numero decimale non può essere quadrato perfetto, se non termina con un numero pari di cifre decimali.*

In vero, perchè un numero decimale sia quadrato perfetto N^2, bisogna che esso sia il quadrato d'un numero *decimale* N; ma in tal caso N^2 contiene un numero pari di cifre decimali (400).

4° *Una frazione ordinaria non può essere quadrato perfetto se, ridotta a' minimi termini, questi non sono quadrati perfetti.*

In fatti, perchè una frazione irreduttibile $\frac{A}{B}$ sia quadrato perfetto bisogna che essa sia il quadrato d'una *frazione ordinaria irreduttibile* $\frac{a}{b}$; ma in tal caso il quadrato $\frac{A}{B}$ di $\frac{a}{b}$ è una frazione irreduttibile, i cui termini sono quadrati (403).

La precedente condizione è sufficiente; poichè se i termini A e B sono quadrati, la frazione $\frac{A}{B}$ avrà una radice commensurabile (402).

Osservazione. — Non si deve già credere che siano quadrati perfetti tutti i numeri, ne' quali trovansi adempite le tre

precedenti condizioni; per esempio, 26 non è quadrato perfetto tuttochè termini con 6. Queste condizioni sono *necessarie;* ma fuori dell'ultima, non sono *sufficienti.*

407. — ***Condizione richiesta perchè un numero intiero sia quadrato perfetto.*** *Affinchè un numero intero sia quadrato perfetto,* è necessario e sufficiente *che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari.*

1° *È necessario.* Di fatti, i fattori primi del quadrato d'un numero intero hanno tutti esponente pari (395).

2° *È sufficiente.* In vero, se tutti gli esponenti de' fattori primi sono pari, dividendoli per 2 si formerà un numero che elevato al quadrato riprodurrà il primo (394).

408. — ***Radice quadrata a meno d'un'unità.*** Un numero intero non quadrato perfetto è sempre compreso fra i quadrati di due numeri interi consecutivi.

Così 32 è compreso fra 25 e 36, che sono i quadrati de' numeri consecutivi 5 e 6. Quindi la radice di 32 dovendo essere compresa fra 5 e 6, il suo valore a meno d'un'unità per difetto sarà 5. Ora, 5 è la radice quadrata del maggior quadrato intero 25 contenuto in 32. Dunque:

La radice quadrata, a meno d'un'unità per difetto, di un numero intero non quadrato perfetto, è la radice quadrata del massimo quadrato intero in esso contenuto.

409. — Consideriamo ora un numero frazionario $^{31}/_{4}$ ossia $7 + {}^{3}/_{4}$.

Questo numero essendo compreso fra 4 e 9, che sono i quadrati de' numeri consecutivi 2 e 3, la sua radice quadrata sarà compresa fra 2 e 3; perciò 2 esprimerà questa radice a meno d'un'unità per difetto. Ora il numero 2 è la radice a meno d'una unità della parte intera 7 del numero dato. Dunque:

Le radice quadrata, a meno d'un'unità per difetto, di un numero frazionario non quadrato perfetto, è la radice a meno di un'unità per difetto della parte intera del numero medesimo.

410. — ***Numero delle cifre della radice quadrata.*** Si può determinare *a priori* il numero delle cifre componenti la radice quadrata a meno d'un'unità di qualsivoglia numero intero.

In vero osservando che

i numeri 1, 10, 100, 1090,.....,
hanno per quadrati 1, 100, 10000, 1000000,.....,

si scorge che un numero compreso fra 1 e 100 ha una radice compresa fra 1 e 10; dunque la radice d'un numero di una o due cifre non ha che una sola cifra.

Similmente un numero compreso fra 100 e 10000 ha una radice compresa fra 10 e 100; dunque i numeri di tre o di quattro

cifre hanno per radice un numero di due cifre. Collo stesso ragionamento si viene a conchiudere che la radice d'un numero di cinque o di sei cifre ne contiene tre, e che in generale:

La radice quadrata d'un numero ha tante cifre quanti sono i gruppi di due cifre in cui può scomporsi il numero compresovi l'ultimo, che talvolta riesce d'una sola cifra.

411. — **Corollario.** *Se la radice quadrata d'un numero intero* N *ha più di una cifra, le decine di questa radice sono date dalla radice del maggior quadrato intero contenuto nel numero delle centinaia di* N.

Per maggior intelligenza, supponiamo che 218 sia la radice del numero proposto *N;* dico che le decine 21 di questa radice sono la radice del maggior quadrato contenuto nel numero delle centinaia di *N*.

In fatti, 218 essendo compreso fra i numeri consecutivi di decine 21 e 22, il suo quadrato *N* sarà compreso fra i quadrati di 21 e 22 decine, cioè fra 441 e 484 centinaia. Laonde (408) il maggior quadrato contenuto nelle centinaia di *N* è 441, cioè il quadrato delle 21 decine della radice. Dunque le decine della radice 218 sono la radice del maggior quadrato 441 compreso nelle centinaia del numero proposto *N*.

§ 3° — ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA.

Radice a meno d'un'unità dei Numeri interi.

412. — ***Numeri di una o due cifre.*** Ogni numero di una o due cifre avendo per radice un numero di una sola cifra, questa si troverà direttamente col mezzo del seguente quadro:

Numeri di una sola cifra	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, 9.
Loro quadrati	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64, 81.

Se il numero proposto è uno de' quadrati perfetti 1, 4, 9, 16,... la sua radice sarà il numero corrispondente 1, 2, 3, 4,...

Esempio. $\sqrt{64}=8$.

Se poi il numero proposto non è quadrato perfetto, la sua radice a meno d'un'unità sarà (408) quella del maggior quadrato in esso contenuto; il quale si può facilmente trovare mediante il suddetto quadro.

Esempio. La radice a meno d'un'unità di 58 è uguale alla radice di 49, che è 7; dunque $\sqrt{58}$ a meno d'un'unità=7.

413. — ***Numeri di tre o quattro cifre.*** Proponiamoci di estrarre la radice quadrata da 7396.

La richiesta radice avrà due cifre (410); e siccome il quadrato di essa è il numero proposto 7396, questo numero è la somma di tre parti (389), cioè: il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, il quadrato delle unità. Cosicchè rappresentando con a le decine della radice, e con b le unità della medesima, si avrà

$$7396 = a^2 + 2ab^2 + b^2.$$

Se ragionando sopra quest'equazione perveniamo a determinare il valore delle lettere a e b, sarà trovata la radice.

Ora, poichè a rappresenta decine, il suo quadrato a^2 è un numero esatto di centinaia (389); e poichè esso trovasi nel numero proposto, deve essere tutto nelle 73 centinaia del medesimo. *Separiamo con un punto le due prime cifre a destra*, che non fanno parte di questo quadrato.

73.96	86 *Radice*
$a^2 = 64\ 00$	$2a = 2.8 = 16$ *Divisore*
Residuo... 99.6	$2ab = 2.8\,0.6 = 960$
$2ab + b^2 = 99.6$	$b^2 = 6^2 = 36$
Residuo... 00.0	$2ab + b^2 = \ldots\ldots 996$

Il numero 73 essendo il quadrato della cifra a (più alcune centinaia che possono provenire dalla seconda parte $2ab$), questa cifra si otterrà *estraendo a meno d'un'unità la radice di* 73, il che dà 8: dunque $a = 8$ decine.

Formando il quadrato di queste 8 decine, avremo la prima parte a^2, cioè $(80)^2 = 6400$, che *sottratta dal numero proposto*, il residuo 996 non conterrà più che le altre due parti; onde si ha

$$996 = 2ab + b^2.$$

Col mezzo di questa nuova uguaglianza perverremo a determinare il valore di b, ragionando come segue.

La parte $2ab$, la quale può scriversi in questa forma $2a \times b$, essendo il prodotto di decine per unità, rappresenta un numero esatto di decine (389); e poichè esso trovasi nel residuo 996, deve essere tutto nelle 99 decine del medesimo. *Separiamo con un punto la prima cifra a destra*, che non fa parte di questo prodotto.

Poichè già conosciamo il valore di a, moltiplicando per 2, avremo quello di $2a$ cioè 16 decine; quindi se 99 fosse esattamente il prodotto di $2a \times b$, avremo un prodotto 99 ed uno dei suoi fattori 16; perciò l'altro fattore b si otterrebbe (116) col *dividere* 99 *per* 16, il che dà 6. Ma il numero 99 contiene pure le decine provenienti dalla terza parte b^2, le quali possono influire sul quoto della precedente divisione; cosicchè il 6 può essere troppo grande, e conviene perciò verificarlo.

A questo fine *cerchiamo i valori delle parti* 2ab *e* b^2, *ponendo* 6 *invece di* b: siccome la somma di queste parti dev'essere contenuta nel residuo 996, se essa riesce maggiore conchiuderemo che il 6 è troppo grande e metteremo 5.

Ora, le suddette parti danno $2ab=2.80.6=960$ e $b^2=6^2=36$; donde $2ab+b^2=996$. Questa somma potendosi sottrarre dal precedente residuo, conchiudiamo che $b=6$, e per conseguenza la radice richiesta è 86.

414. — Che il numero 86 sia veramente la radice di 7396 apparirà evidente, ove si rifletta che, avendo nel corso dell'operazione sottratto da 7396 successivamente tutte le parti costituenti il quadrato di 86, questo quadrato stesso venne sottratto; e giacchè il residuo fu nullo, il quadrato di 86 è uguale a 7396. Per conseguenza

$$\sqrt{7396}=86.$$

415. — La dimostrazione precedente (413) si estende pure al caso in cui il numero proposto non è un quadrato perfetto; poichè trattandosi di estrarre la radice solamente a meno d'una unità, i ragionamenti volgono sul maggior quadrato in esso contenuto (408), e l'eccesso del numero proposto sopra questo quadrato rimane intatto e costituisce un *resto* alla fine dell'operazione.

416. — ***Osservazione.*** La somma delle due parti $2ab$ e b^2 si poteva ottenere mediante una sola operazione. Di fatti si ha

$$2ab+b^2=2.80.6+6^2=160.6+6^2=(160+6)6=166\times 6;$$

da cui si scorge che dopo di avere raddoppiato le decine 8, bastava scrivere a destra del risultato 16 la cifra 6 delle unità, il che dà 166, e moltiplicare questo numero per la medesima cifra 6.

Oltre a ciò le sottrazioni si possono effettuare come nella divisione, cioè di mano in mano che si fa la moltiplicazione, senza scrivere i prodotti.

417. — Ciò posto, ecco in qual modo si opera in pratica:

73.96	86
99.6	166
000	6

Dopo aver disposta l'operazione come qui accanto, separo le ultime due cifre a destra e dico: il maggior quadrato contenuto in 73 è 64; così la cifra delle decine è 8 che pongo alla radice: 8 volte 8 fanno 64, che levato da 73 resta 9. Abbasso le due cifre seguenti che formeranno il numero 996, da cui separo l'ultima cifra verso destra. Raddoppio la radice 8 e scrivo il risultato 16 di sotto. Dividendo 99 per 16, trovo 6 per la cifra delle unità. Scrivo questa cifra accanto al 16 ed anche sotto, ed ho il numero 166, il cui prodotto per 6 essendo levato da 996, dà 0 per residuo; onde conchiudo che 86 è la radice esatta di 7396.

Essendochè molto importa il sapere bene estrarre la radice dai numeri di tre o di quattro cifre prima di procedere a numeri maggiori, poniamo qui tre altri esempi, che facilmente s'intenderanno per quanto fu detto sul precedente.

18.49	43
24.9	83
000	3

56.25	75
72.5	145
000	5

	40.56	63
	45.6	123
Resto...	87	3

418. — ***Numeri di cinque o più cifre.*** Proponiamoci ora di estrarre la radice quadrata dal numero 125316.

Questa radice avrà tre cifre (410); perciò le decine di essa formano un numero di due cifre; e siccome queste decine sono la radice del maggior quadrato contenuto nelle centinaia del numero proposto (411), siamo condotti, per ottenerle, a separare le due cifre a destra, e ad estrarre la radice del numero risultante 1253 centinaia. Ora questo numero non avendo che quattro cifre, si opera come negli esempi precedenti (*il numero proposto risulta così scomposto in gruppi di due cifre, cominciando dalla destra*), il che dà 35, con 28 centinaia per resto. Le decine della radice sono dunque 35.

Abbassando accanto al resto il periodo 16 delle unità, si ha per residuo totale 2816, il quale non contiene più che le ultime due parti del quadrato, essendo già sottratta la prima, cioè il quadrato delle decine 35. Ragionando sopra questo resto come abbiamo fatto nel primo esempio (413), veniamo a conoscere che bisogna separare con un punto il 6, e dividere 281 pel doppio delle decine, che è 70 (questo divisore si può formare sommando 65 e 5, che già si trovano uno sotto l'altro); si ottiene così 4 per quoto, che scriviamo a destra del divisore 70, il che dà 704. Moltiplicando ora questo numero per la stessa cifra 4, e sottraendo il prodotto dal residuo 2816, risulta zero per ultimo resto; onde si conchiude che la radice di 125316 è 354.

12.53.16	354
35.3	65
281.6	5
0000	704
	4

419. — Riassumendo quanto ne' due precedenti esempi abbiamo esposto, si può formolare la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero, lo si divida in gruppi di due cifre ciascuno, cominciando a destra; l'ultimo potrà contenerne una sola. Estraggasi la radice contenuta nel primo gruppo a sinistra, e se ne sottragga il quadrato. Accanto al residuo si abbassi il gruppo seguente e separisi con un punto l'ultima cifra a destra. Dividasi la parte a sinistra del punto pel doppio della radice e pongasi il quoto a fianco del divisore ed alla radice già trovata. Si moltiplichi quindi il numero formato col doppio della radice e la cifra del quoto per questo quoto, e sottraggasi il prodotto da tutto il dividendo. Accanto al secondo residuo si abbassi il terzo gruppo, e si operi sul numero risultante come sul precedente, dividendolo pel doppio del numero formato dalle cifre della radice già trovata. Si continui in tal guisa l'operazione sino a tanto che i gruppi siano tutti abbassati; se l'ultimo residuo è nullo, la radice è esatta; se v'ha residuo, la radice è quella del maggior quadrato contenuto nel numero proposto ed è esatta a meno di un'unità.*

420. — ***Avvertenze.*** Dal sin qui esposto sull'estrazione

della radice quadrata risultano altre conseguenze che molto importa aver presenti per non errare nell'operazione.

1ª Ciascuno dei gruppi in cui si è diviso il numero proposto dà una cifra alla radice (ciò è conforme al principio stabilito al n° 410); perciò dopo abbassato un gruppo a destra del residuo precedente, e separata l'ultima cifra a destra del numero risultante, se il numero che rimane a sinistra del punto non contiene il doppio della radice già trovata, si dovrà mettere uno zero a destra di questa radice, quindi abbassare il gruppo seguente e continuare l'operazione.

2ª Per la stessa ragione, qualora non vi fosse più alcun residuo ed il numero proposto finisse con uno o più gruppi di zeri non ancora abbassati, bisognerebbe scrivere a destra della radice ottenuta tanti zeri quanti sono i suddetti gruppi.

3ª La tema di provare una cifra troppo grande può indurre nell'errore contrario, quello cioè di provarne una troppo piccola.

Una cifra posta alla radice è troppo piccola quando il resto dell'operazione da cui essa proviene è maggiore del doppio della radice trovata.

In fatti, la differenza tra i quadrati di due numeri consecutivi essendo uguale al doppio del minore più 1 (390), ne segue che se un resto fosse anche solo uguale al doppio della radice già ottenuta più uno, il numero dal quale venne estratta questa radice non sarebbe il quadrato di essa, ma sì il quadrato del numero ad essa consecutivo, cioè di un'unità più grande; perciò mancherebbe un'unità alla radice, ossia l'ultima cifra sarebbe troppo piccola.

Radice degl'Interi con una data approssimazione.

421. — ***Approssimazione in frazioni ordinarie.*** Proponiamoci di estrarre la radice quadrata del numero 5 a meno di $^1/_{12}$.

Si ha $$5=5.\frac{12^2}{12^2}=\frac{5.12^2}{12^2}.$$

La radice di questa frazione è una frazione (402), i cui termini sono $\sqrt{5.12^2}$ e $\sqrt{12^2}$. Ora $\sqrt{12^2}=12$ esattamente, e $\sqrt{5.12^2}=\sqrt{5.144}=\sqrt{720}=26$ a meno d'un'unità. Risulta pertanto

$$\sqrt{5}=\sqrt{\frac{5.12^2}{12^2}}=\frac{\sqrt{5.12^2}}{\sqrt{12^2}}=\frac{\sqrt{720}}{12}=\frac{26}{12}.$$

Dico ora che il numero frazionario $^{26}/_{12}$ è la radice di 5 a meno di $^1/_{12}$. Invero il valore esatto della radice di 5 è rap-

presentato dalla frazione $\frac{\sqrt{720}}{12}$; ma il denominatore di questa frazione è esatto, ed il numeratore è compreso tra 26 e 27; dunque la frazione stessa, e quindi la radice di 5 è compresa fra $^{26}/_{12}$ e $^{27}/_{12}$.

422. — In generale, essendo N un numero intero non quadrato perfetto, di cui si voglia la radice quadrata a meno di $\frac{1}{m}$ si avrà

$$\sqrt{N}=\sqrt{\frac{N.m^2}{m^2}}=\frac{\sqrt{N.m^2}}{\sqrt{m^2}}=\frac{\sqrt{N.m^2}}{m};$$

e chiamando n il valore a meno d'un'unità di $\sqrt{N.m^2}$, la radice di N a meno di $\frac{1}{m}$ sarà: $\frac{n}{m}$ per difetto, e $\frac{n+1}{m}$ per eccesso.

Da ciò risulta la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero a meno di una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore qualsivoglia numero, si moltiplica il numero dato pel quadrato di questo denominatore; si estrae dal prodotto la radice quadrata a meno d'un'unità, ed a questa radice si dà per denominatore quello che dinota il grado d'approssimazione. Il numero frazionario che risulta, sarà la radice richiesta colla voluta approssimazione per difetto.*

423. — ***Approssimazione in decimali.*** Ordinariamente si valuta in decimali la radice approssimata dei numeri.

Dalla precedente regola si ha:

$$\sqrt{5} \text{ a meno di } \frac{1}{10}=\sqrt{\frac{5.100}{100}}=\frac{\sqrt{500}}{10}=\frac{22}{10}=2{,}2;$$

$$\sqrt{29} \text{ » } \frac{1}{100}=\sqrt{\frac{29.10000}{10000}}=\frac{\sqrt{290000}}{100}=\frac{538}{100}=5{,}38;$$

$$\sqrt{7} \text{ » } \frac{1}{1000}=\sqrt{\frac{7.1000000}{1000000}}=\frac{\sqrt{7000000}}{1000}=\frac{2645}{1000}=2{,}645.$$

Questi esempi fanno vedere che la radice si ottiene a meno di 0,1 scrivendo a destra del numero dato due zeri, estraendo a meno d'un'unità la radice del numero risultante, e separando colla virgola una cifra a destra di questa radice; a meno di 5,01 scrivendo quattro zeri a destra del numero proposto, estraendo la radice del numero risultante, e separando alla destra di questa due cifre; ecc. Laonde si può conchiudere colla seguente

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero coll'approssimazione in decimali, si aggiungono a destra del numero dato tante coppie di zeri quante cifre decimali si vogliono alla radice; si estrae a meno d'un'unità la radice del numero risultante, ed alla destra di questa si separano colla virgola tante cifre, quante sono le coppie di zeri aggiunte al numero dato.*

Estrazione della Radice quadrata dalle Frazioni.

424. — ***Frazioni ordinarie.*** Nell'estrazione della radice da una frazione ordinaria, bisogna anzi tutto conoscere se essa è quadrato perfetto o no.

1° La frazione è un quadrato perfetto, se ridotta a' minimi termini, questi sono quadrati perfetti (406). In tal caso la radice si otterrà (402) estraendo separatamente la radice del numeratore e quella del denominatore, dando poi alla prima per denominatore la seconda.

Esempio $\sqrt{\frac{112}{175}} = \sqrt{\frac{112:7}{175:7}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{4}{5}.$

2° Se poi la frazione proposta non è quadrato perfetto si opera come segue.

Vogliasi estrarre la radice quadrata da $^5/_{12}$.

Moltiplicando i due termini pel denominatore 12, esso diventa quadrato perfetto, senza che la frazione cambi valore; si ha perciò

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5.12}{12^2}} = \frac{\sqrt{5.12}}{\sqrt{12^2}} = \frac{\sqrt{60}}{12} = \frac{7}{12}.$$

Il numeratore 7 è la radice a meno d'un'unità nel numero 60; si conchiude adunque, come al n° 421, che $^7/_{12}$ esprime la radice quadrata di $^5/_{12}$ a meno di $^1/_{12}$.

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria, la si riduce a' minimi termini. Se i due termini della frazione ridotta sono quadrati perfetti, si estrae la radice del numeratore, poscia quella del denominatore, ed alla prima si dà per denominatore la seconda: la frazione così formata è la radice esatta della frazione data. Se i termini della frazione ridotta non sono quadrati perfetti, si moltiplica il numeratore pel denominatore, si estrae a meno d'un'unità la radice del prodotto, alla quale si dà per denominatore quello della frazione. La frazione risultante è la radice richiesta a meno dell'unità divisa pel denominatore.*

425. — ***Osservazioni.*** **1ª** Se il denominatore delle frazioni fosse quadrato perfetto, ancorchè il numeratore non fosse tale, è chiaro che non farebbe d'uopo moltiplicare l'uno per l'altro; ma alla radice del numeratore si darebbe per denominatore quella del denominatore dato.

2ª Per rendere quadrato perfetto il denominatore, non è sempre necessario moltiplicarlo per se stesso, essendo sufficiente (407) moltiplicarlo per quei suoi fattori primi che non avessero esponente pari. Perciò se tra i fattori primi del denominatore alcuni hanno esponente pari, basterà moltiplicare i due termini della frazione per le prime potenze degli altri fattori primi.

Esempio. — Il denominatore 12 della frazione precedente avendo per fattori primi 2^2 e 3, bastava dunque moltiplicare i due termini per 3; il che avrebbe dato

$$\sqrt{\frac{5}{12}}=\sqrt{\frac{5.3}{12.3}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{15}}{6^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}=\frac{3}{6}.$$

In questo caso l'approssimazione è solamente a meno di $^1/_6$.

426. — ***Frazioni decimali.*** Ogni frazione decimale equivale (351) ad una frazione ordinaria avente per denominatore una potenza di 10.

1° Se il numero delle cifre decimali è pari, il denominatore è una potenza pari di 10.

Per esempio $0{,}2475=\frac{2475}{10000}=\frac{2475}{10^4}$; $3{,}25=\frac{325}{100}=\frac{325}{10^2}$.

In tal caso il denominatore essendo quadrato perfetto, la radice della frazione si otterrà (osservazione 1ª) estraendo la radice dal numeratore cioè dal numero decimale considerato come intero, e dividendola per la radice del denominatore. Questa divisione si fa ponendo la virgola al posto conveniente. Si avrà per esempio

$$\sqrt{0{,}2475}=\sqrt{\frac{2475}{10^4}}=\frac{\sqrt{2475}}{\sqrt{10^4}}=\frac{\sqrt{2475}}{10^2}=\frac{49}{100}=0{,}49.$$

2° Se poi il numero delle cifre decimali è impari, il denominatore della frazione sarà una potenza impari di 10, e per conseguenza non quadrato perfetto.

Tal è la frazione

$$0{,}365=\frac{365}{1000}=\frac{365}{10^3}.$$

In questo caso, se si aggiunge ad ambi i termini uno zero, il denominatore diventa quadrato perfetto, senza che il valore della frazione si alteri; cosicchè si potrà quindi estrarre la radice come nel caso precedente.

Si noti che aggiungere uno zero ai due termini della frazione $\frac{365}{1000}$, per esempio, torna lo stesso che aggiungere uno zero alla destra delle cifre decimali 0,365; giacchè $\frac{3650}{10000}=0{,}3650$.

Si può dunque formolare la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale: Se è pari il numero delle cifre decimali, si estrae a meno d'un'unità la radice del numero dato, considerandolo come intero, ed alla destra di questa radice si separano colla virgola tante cifre quante coppie di decimali contiene il numero dato. Se il numero delle cifre decimali è impari, si scrive uno zero a destra del numero proposto, e si opera sul numero risultante come si è detto.*

Radice delle Frazioni con una data approssimazione.

427. — ***Frazioni ordinarie.*** Se il grado d'approssimazione con cui si vuole ottenere la radice d'una frazione ordinaria è indicata da una frazione ordinaria, si opera come per l'approssimazione della radice de' numeri interi (422); giacchè questa regola è applicabile qualunque sia il numero N, intero o frazionario.

Si debba, per esempio, estrarre a meno di $^1/_{15}$ la radice di $^6/_7$.

Si avrà da prima, secondo la citata regola,

$$\frac{6}{7} \times 15^2 = \frac{1350}{7} = 192 + \frac{6}{7};$$

dal qual numero frazionario conviene quindi estrarre la radice a meno d'un'unità, e darle per denominatore il 15. Or la radice a meno d'un'unità di un numero frazionario è quella stessa della parte intera del medesimo (409). Dunque si ha

$$\sqrt{\frac{6}{7}} \text{ a meno di } \frac{1}{15} = \frac{\sqrt{192}}{15} = \frac{13}{15}.$$

428. — Se poi il grado d'approssimazione è indicato da una frazione decimale, si opera come segue.

Debbasi estrarre la radice quadrata di $^6/_7$ a meno di 0,001.

Si ha

$$\frac{6}{7} = 0{,}857142857142....$$

Ora, poichè ogni coppia di cifre decimali dà una cifra alla radice (426), per avere la radice $^6/_7$ a meno di 0,001, cioè con tre decimali, basterà prendere nella frazione decimale equivalente le sei prime cifre, ed estrarre la radice dal numero decimale risultante. Si ha dunque

$$\sqrt{\frac{6}{7}} \text{ a meno di } 0{,}001, = \sqrt{0{,}857142} = 0{,}925.$$

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria coll'approssimazione in decimale, la si riduce in una frazione decimale, che abbia un numero di cifre doppio di quello che si vuole alla radice, e si estrae la radice dalla frazione decimale ottenuta.*

429. — ***Osservazione.*** La regola precedente poteva dedursi dal n° 427. Invero la frazione 0,001 indicante il grado

di approssimazione, potendo prendere la forma $\frac{1}{1000}$, si ha

$$\frac{6}{7} \times 1000^2 = \frac{6000000}{7} = 857142 + \frac{6}{7}, \text{ e quindi}$$

$$\sqrt{\frac{6}{7}} \text{ a meno di } \frac{1}{1000} = \frac{\sqrt{857142}}{1000} = \frac{925}{1000} = 0{,}925.$$

Ora, dividere 6000000 per 7, estrarre la radice della parte intera del quoto, e dividere questa radice per 1000, sono appunto le operazioni prescritte, sebbene in altri termini, dalla regola suddetta.

430. — ***Frazioni decimali.*** Quando la frazione da cui si vuole estrarre la radice è una frazione decimale, l'approssimazione si suole determinare in decimali. Basta perciò prendere nella frazione data un numero di cifre decimali doppio di quello che si vuole avere alla radice, estrarre la radice del numero risultante, e porre la virgola al debito luogo (426).

Debbasi estrarre a meno di 0,01 la radice di 4,305.

Si aggiunge uno zero per rendere sufficiente il numero dei decimali; quindi si ha

$$\sqrt{4{,}3050} = 2{,}07.$$

Problemi sull'Estrazione della Radice quadrata.

210. Qual è la radice quadrata di ciascuno dei numeri: 169; 576; 1225; 4096; 5329; 6724; 61009; 454276; 505521; 737881; 808201; 927369?

211. Estrarre a meno di 0,01 la radice quadrata dai numeri: 9828432; 16032916; 30858025; 31900584; 96964006; 48832144; 63091249; 64738116.

212. Si calcoli a meno di 0,01 la radice quadrata dei seguenti numeri decimali: 36,046; 581,2794; 167,036.

213. Cerchisi la radice quadrata delle seguenti frazioni decimali: 0,401; 0,83754; 0,0008783; 0,000075328; 0,043; 0,35; 0,00024; 0,000237.

214. Qual è la radice quadrata delle seguenti frazioni: $^{9}/_{121}$; $^{256}/_{1156}$; $^{5776}/_{19881}$; $^{64}/_{676}$; $^{83}/_{2916}$; $^{529}/_{1012}$; $^{9409}/_{1369}$; $^{567}/_{3040}$; $^{2754}/_{8904}$?

215. Si domanda la radice quadrata a meno di 0,001 delle seguenti frazioni: $^{4}/_{9}$; $^{3}/_{7}$; $^{5}/_{12}$; $^{17}/_{28}$; $^{21}/_{34}$; $^{72}/_{83}$; $^{124}/_{639}$; $^{1349}/_{2725}$; $^{25432}/_{12835}$; $^{82}/_{9468843}$.

216. Qual è la radice quadrata approssimativa dei seguenti numeri: 1° 59 a meno di $^{1}/_{9}$; 2° 59 a meno di $^{1}/_{12}$; 3° 3 a meno di $^{1}/_{23}$; 4° $^{19}/_{5}$; a meno di $^{1}/_{12}$; 5° 29 $^{37}/_{43}$ a meno di $^{1}/_{12}$?

217. Un reggimento di 9216 uomini forma un quadrato a pieno centro; quanti sono in ciascuna fila?

218. In un terreno di forma quadrata si piantano alberi 1521, ponendoli ad egual distanza e su linee parallele; quanti ne contiene ogni linea?

219. Adele compra 1936 rosai, che vuol piantare ad ugual distanza in terreno quadrato; quanti ne dovrà mettere su ciascun lato?

220. Un generale con 1152 soldati vuol formare un quadrato a centro vuoto, che possa contenere 42 uomini per lato; quanti ne conterrà il lato esteriore, e qual sarà l'altezza della colonna?

221. Se il quadrato della somma che ho, diceva Claudio, fosse diviso per $^4/_3$ avrei ll. 1620; quanto ha egli?

222. Dice un pastore: se moltiplico per 16 il numero delle mie pecore, ottengo per prodotto $^1/_3$ del loro quadrato. Quante pecore ha egli?

223. Comprai 54 Cg. d'indaco e 46 di lacca; se il quadrato della spesa totale fu di ll. 63907,84, e l'indaco mi costò ll. 91,80, qual fu il prezzo di 1 Cg. di ciascuna merce?

224. Lo stipendio e l'annua spesa di Alfredo sono tali che 8810000 è la somma dei loro quadrati, e 3690000 ne è la differenza; qual è l'annuo suo risparmio?

225. Cirillo compra panno per ll. 1225 ad un prezzo uguale al $^1/_{16}$ de' metri comprati; nel rivenderlo vuol guadagnare lire 0,75 su ogni metro. Qual è il numero dei metri, e qual dev'essere il prezzo di vendita di ciascuno?

226. Perpetua comprò olio di noce a ll. 1,80 il Cg.; aggiungendo 175 al quadrato del numero de' Cg. comprati, questo numero di chilogrammi aumenta di $^1/_3$. Quanto dovette sborsare?

227. Il quadrato della somma che ho diviso per $^1/_4$ della medesima dà 96; qual è questa somma?

228. Se il quadrato della somma pagata per un cane levriere si dividesse pei $^2/_5$ della medesima, otterrebbesi 100; quanto costa detto animale?

229. Spesi ll. 88,36 in panno, pagando per ogni metro tante lire quanti erano i metri; chiedesi la quantità comprata, e quanto debbasi rivendere il metro per guadagnare ll. 1,45 su ciascuno.

230. Mastro Geremia vendè per ll. 3200 certo numero di chitarre, ad un prezzo tale che diviso pel numero delle chitarre dà 8. Cerchisi il numero di esse, ed il prezzo di ciascuna.

231. Il quadrato del mio avere supera di ll. 83 quello della somma che ho spesa; qual era questo avere se ora mi resta solo 1 lira?

232. Qual è la mia età, se fra un anno il quadrato di essa sarà aumentato di 71?

§ 4° — ESTRAZIONE ABBREVIATA della Radice quadrata.

431. — ***Teorema.*** *Dopo aver trovato più della metà delle cifre della radice quadrata di un numero intero, si possono ottenere tutte le altre, dividendo il resto pel doppio della parte della radice già ottenuta.*

Sia N il numero intero dato, a la parte già trovata alla radice, R il resto, e x il numero (per lo più incommensurabile) che manca ad a per uguagliare il valore esatto di $\sqrt{N}$. Dico che per avere il valore di x a meno di un'unità basta dividere R per $2a$.

In fatti, si ha per ipotesi $\sqrt{N} = a + x$; si avrà perciò

$N = (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$, donde $N - a^2 = 2ax + x^2$.

Ora, poichè a^2 è il quadrato della parte della radice già ottenuta, $N - a^2$ è il resto R dell'operazione; dunque

$$2ax + x^2 = R, \text{ donde } 2ax = R - x^2, \text{ e quindi}$$

$$x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Rappresentando con q il quoto della divisione R per $2a$, e con r il resto della medesima divisione, la precedente equazione diventa

$$(1) \qquad x = q + \frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Si tratta ora di dimostrare che il quoto q è il valore di x a meno d'un'unità; il che avrà luogo se ciascuna delle frazioni $\frac{r}{2a}$ e $\frac{x^2}{2a}$ è minore di 1, perchè in tal caso la loro differenza sarà pure minore di 1. Proviamo adunque essere ciascuna delle frazioni suddette minore dell'unità.

Sia n il numero delle cifre incognite della radice, ossia il numero delle cifre componenti il valore di x a meno d'un'unità. Se queste cifre fossero tre, si avrebbe $x < 10^3$; se fossero quattro, si avrebbe $x < 10^4$; ecc.; dunque si ha

$$x < 10^n, \text{ d'onde } x^2 < 10^{2n}.$$

Ma se le cifre incognite sono n, quelle già trovate sono almeno $n+1$; perciò il numero a essendo formato dalle cifre trovate seguite da n, zeri, contiene almeno $2n+1$ cifra quindi *a fortiori* $2a$ ne contiene $2n+1$.

Dunque si ha (152) $2a > 10^{2n}$, quindi $x^2 < 2a$, e finalmente

$$\frac{x^2}{2a} < 1.$$

In quanto alla frazione $\frac{r}{2a}$ è evidente che essa è minore di 1, giacchè r è il resto d'una divisione in cui $2a$ era il divisore.

Dunque il teorema è dimostrato.

432. — ***Osservazione.*** Quand'anche a non contenesse che $2n$ cifre, se la prima di esse è uguale o maggiore di 5, $2a$ ne conterrà sempre $2n+1$. Da ciò si conchiude che se la prima cifra della radice è uguale o maggiore di 5, il teorema ha luogo dopo trovata solamente la metà delle cifre della radice.

433. — Applichiamo ora il precedente teorema alla estrazione a meno di un'unità della radice quadrata di

3273377258926096.

Questo numero essendo composto di 16 cifre, ne avrà 8 alla radice; e poichè il primo gruppo a sinistra è 32, la prima cifra della radice è 5. Perciò la metà delle cifre è sufficiente (n. ant.) per determinare le altre. Ciò posto, ecco come si opera:

1° Si prendono le 8 prime cifre a sinistra del numero dato, e si trascurano per ora tutte le altre. Applicando il teorema al numero formato da queste 8 cifre, si otterranno le quattro prime cifre della radice: le due prime col metodo ordinario, le altre due colla divisione. Si ha per questa prima operazione

$$N = 32733772,\ a = 5700,\ 2a = 11400,$$

$$a^2 = 32490000,\ R = N - a^2 = 243772,\ q = \frac{R}{2a} = 21.$$

Le quattro prime cifre della radice sono dunque 5721.

2° Avendo ora la metà delle cifre, si ottengono le altre colla divisione, applicando il teorema all'intero numero dato.

In quest'altra operazione si ha

$$N = 3273377258926096,\ a = 57210000,$$
$$2a = 114420000,\ a^2 = 3272984100000000$$

$$R = N - a^2 = 393158926096,\ q = \frac{R}{2a} = 3436.$$

La radice richiesta è dunque 57213436.

Osservazione. — È chiaro che questo metodo è applicabile a' numeri decimali; poichè dopo aver reso pari il numero delle cifre decimali, il numero dato si considera come intero, coll'avvertenza di mettere poi la virgola al debito luogo nella radice.

434. — ***Caso particolare.*** Si può risolvere il numero dato ne' suoi fattori primi: se questi hanno tutti esponente pari, la radice si otterrà (407 — 2°) facendo il prodotto di tutti i fattori primi, presi ciascuno con un esponente uguale alla metà di quello che ha.

Esempio. Debbasi estrarre la radice di 11687339664.

Si ha $11687339664 = 2^4.3^6.7^2.11^2.13^2$;

dunque $\sqrt{11687339664} = 2^2.3^3.7.11.13. = 108108.$

Esercizi

sull'Estrazione abbreviata della Radice quadrata.

233. Si calcoli a meno d'un'unità la radice quadrata di 7840125849041283.

234. Qual è la radice quadrata della frazione $^3/_7$ con 12 decimali?

235. La superficie della terra è di 512.000.000.000.000 metri quadrati; qual sarebbe il lato d'un quadrato di uguale area?

236. Cercare con 10 decimali la radice quadrata di ciascuno dei numeri 2, 3, 5 e 7.

§ 5° — TEORICA DEI CUBI E DELLE RADICI CUBICHE.

435. — Il **cubo** d'un numero è il prodotto di questo numero moltiplicato per se stesso due volte (379).

Così 125 è il cubo di 5, perchè è uguale a $5 \times 5 \times 5$; similmente $a \times a \times a$, ossia a^3 è il cubo di a.

436. — La **radice cubica** d'un numero è un altro numero, il quale elevato al cubo riproduce il primo (383).

Così 5 è la radice cubica di 125, e a è la radice cubica di a^3.

437. — ***Teorema 1°.*** *Il cubo della somma di due numeri si compone del cubo del primo numero, più il triplo prodotto del quadrato del primo pel secondo, più il triplo prodotto del primo pel quadrato del secondo, più il cubo del secondo.*

In fatti, sia $a+b$ la somma proposta. Il cubo s'indica così: $(a+b)^3$, e per ottenerlo bisogna (435) moltiplicare la somma $a+b$ per se stessa due volte; or moltiplicandola una volta per se stessa si ottiene il quadrato che è $a^2+2ab+b^2$ (388); e moltiplicando poi questo quadrato per $a+b$ si ottiene il cubo richiesto .....

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Si ha dunque

$$(1) \qquad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

438. — ***Corollario.*** *Si può dunque, per formare il cubo d'un numero, scomporlo in due parti, e sommare insieme i cubi di queste parti col triplo prodotto del quadrato della prima parte per la seconda, e il triplo prodotto del quadrato della seconda per la prima.*

Per esempio, il cubo di 13 si può ottenere come segue:

$$13^3=(5+8)^3=5^3+3\times5^2.8+3\times5.8^2+8^3=2197,$$

ovvero

$$13^3=(6+7)^3=6^3+3\times6^2.7+3\times6.7^2+7^3=2197,$$

ovvero

$$13^3=(10+3)^3=10^3+3\times10^2.3+3\times10.3^2+3^3=2197, \text{ ecc.}$$

Quest'ultimo modo di scomporre il numero 13 per formarne il cubo ci conduce a stabilire il seguente principio, dal quale poi dedurremo il metodo per l'estrazione della radice cubica dei numeri.

Il cubo d'un numero composto di decine e di unità è uguale al cubo delle decine, più tre volte il prodotto del quadrato delle decine per le unità, più tre volte il prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.

Così pel cubo di 37 si avrebbe

$$37^3=(30+7)^3=30^3+3\times30^2.7+3\times30.7^2+7^3.$$

Si osservi che le due prime parti 30^3 e $3\times30^2.7$, effettuando le operazioni diventano 27000 e 18900, cioè la prima termina con tre zeri e la seconda con due. Da ciò si scorge che il *cubo delle decine dà un numero esatto di migliaia, e il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità dà un numero esatto di centinaia.*

439. — ***Teorema 2°.*** *La differenza de' cubi di due numeri interi consecutivi* a *e* a + 1 *è uguale a tre volte il quadrato del minore* a, *più tre volte il minore stesso, più* 1; *ossia* $3a^2+3a+1$.

In vero, il cubo del numero minore a è a^3; in quanto al cubo del maggiore $a+1$, esso si ottiene mediante la formola (l), facendo $b=1$; il che dà

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1.$$

Ora è evidente che questo supera l'altro di $3a^3+3a+1$.

440. — Il precedente teorema somministra un altro mezzo per formare il cubo di un numero intero, quando si conosce il cubo del numero immediatamente inferiore.

Vogliasi formare il cubo di 11.

Il cubo di 10 essendo 1000, quello di 11 sarà

$$10^3+3.10^2+3.10+1=1000+300+30+1=1331.$$

441. — ***Teorema 3°.*** *Il cubo di un prodotto* abc *è uguale al prodotto* $a^3b^3c^3$ *de' cubi de' singoli fattori.* (Dimostraz. come al n° 392).

Esempio $12^3=(3.4)^3=27.64=1728.$

442. — ***Corollario.*** *La radice cubica d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici cubiche de' singoli fattori.* (Dimostraz. come al n° 393).

Esempio $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{8.27}=2.3=6.$

443. — **Teorema 4°.** *Per elevare al cubo la potenza di un numero, basta moltiplicare per* 3 *l'esponente di essa.*

In fatti, sia a^2 da elevare al cubo; si ha

$$(a^2)^3 = a^2.a^2.a^2 = a^{2+2+2} = a^{2.3}.$$

444. — **Teorema 5°.** *I fattori primi del cubo d'un numero hanno tutti un esponente multiplo di* 3. (La dimostraz. è analoga a quella del n° 395).

445. — **Corollario.** *Se il cubo d'un numero intero è divisibile per un numero primo, sarà pure divisibile pel cubo di questo numero primo.* (La dimostraz. è analoga a quella del n° 396).

446. — **Teorema 6°.** *Se un numero termina con zeri o con cifre decimali, il suo cubo termina con un numero triplo di zeri o di cifre decimali.*

Questa verità è una conseguenza de' metodi stabiliti per fare la moltiplicazione (109—4° e 106).

447. — **Corollario.** *Il cubo d'un numero terminante con zeri o con cifre decimali termina con un numero di zeri o di cifre decimali multiplo di* 3.

448. — **Teorema 7°.** *Il cubo di una frazione è uguale ad un'altra frazione, i cui termini sono rispettivamente i cubi de' termini della prima.*

In fatti sia la frazione $\frac{a}{b}$, si avrà

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

449. — **Corollario.** *La radice cubica d'una frazione è uguale ad un'altra frazione, i cui termini sono rispettivamente le radici cubiche dei termini della prima.*

Di fatti, poichè $\frac{a^3}{b^3}$ è il cubo della frazione $\frac{a}{b}$, questa è la radice cubica di quella, e si ha

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}.$$

450. — **Teorema 8°.** *Il cubo d'una frazione irreduttibile è una frazione irreduttibile i cui termini sono cubi.* (Dimostrazione come al n° 403).

451. — **Corollario.** *Il cubo di una frazione non può essere un numero intero.* (Dimostraz. come al n° 404).

452. — **Cubi perfetti.** Dicesi **cubo perfetto** un numero intero o frazionario, il quale è il cubo di un

altro numero. Quello poi che non è il cubo di nessun altro, non è cubo perfetto.

È chiaro, per definizione, che le radici cubiche de' numeri interi o frazionari non cubi perfetti, non possono venire espresse nè da intieri nè da frazioni. Per conseguenza le radici cubiche di sì fatti numeri sono quantità incommensurabili (360); e quindi il loro valore non si può ottenere esattamente, ma solo per approssimazione.

Ciò premesso, i teoremi testè dimostrati conducono ai seguenti *Corollari*, che si dimostrano come quelli relativi ai quadrati (406).

1° *Se la radice cubica d'un numero intero non può esprimersi con un intero, essa non può venire espressa esattamente neppure con un numero frazionario, ed è perciò incommensurabile.* (Conseguenza del n° 451).

2° *Un numero intero non può essere cubo perfetto, se termina per un numero di zeri non multiplo di 3* (446).

3° *Un numero decimale non può essere cubo perfetto, se non termina con un numero di cifre decimali multiplo di 3* (ibid.).

4° *Una frazione ordinaria è o non è cubo perfetto, secondo che ridotta a' minimi termini, questi sono o no cubi perfetti* (449 e 450).

453. — ***Condizione richiesta perchè un numero intero sia cubo perfetto.*** *Affinchè un numero intero sia cubo perfetto* è necessario e sufficiente *che tutti i suoi fattori primi abbiano un esponente multiplo di 3.*

1° *È necessario.* In fatti i fattori primi del cubo d'un numero intero hanno tutti un esponente multiplo di 3 (444).

2° *È sufficiente.* In vero, se tutti i fattori primi sono multipli di 3, dividendoli per 3 si formerà un numero che elevato al cubo riprodurrà il primo (443).

454. — ***Radice cubica a meno d'un'unità.*** *La radice cubica, a meno d'un'unità per difetto, d'un numero intero non cubo perfetto, è la radice cubica del massimo cubo intero in esso contenuto.* (Dimostraz. come al n° 408).

La radice cubica, a meno d'un'unità per difetto, d'un numero frazionario non cubo perfetto, è la radice a meno d'un'unità per difetto della parte intera del numero medesimo. (Dimostrazione come al n° 409).

455. — ***Numero delle cifre della radice cubica.*** Si può determinare *a priori* il numero delle cifre componenti la radice cubica a meno d'un'unità di qualsivoglia numero intero. In fatti osservando che

i numeri	1,	10,	100,	1000,.....,
hanno per cubo	1,	1000,	1000000,	1000000000,.....,

si scorge che un numero compreso fra 1 e 1000 ha una radice

cubica compresa fra 1 e 10; dunque la radice d'un numero di una, due o tre cifre ha una sola cifra.

Similmente un numero compreso fra 1000 e 1000000 ha una radice compresa fra 10 e 100; dunque i numeri di quattro, di cinque o sei cifre hanno per radice un numero di due cifre.

Collo stesso ragionamento si viene a conchiudere che la radice cubica d'un numero di sette, di otto o nove cifre ne contiene tre, e che in generale:

La radice cubica d'un numero ha tante cifre, quanti sono i gruppi di tre cifre in cui può scomporsi il numero, compresovi l'ultimo, il quale può contenere soltanto una o due cifre.

456. — **Corollario.** *Se la radice cubica d'un numero intero* N *ha più di una cifra, le decine di questa radice sono date dalla radice cubica del maggior cubo intero contenuto nel numero delle migliaia di* N.

Supponiamo che 218 sia la radice cubica del numero proposto *N*; dico che le decine 21 di questa radice sono la radice cubica del maggior cubo intero contenuto nel numero delle migliaia di *N*.

In fatti, 218 essendo compreso fra i numeri consecutivi di decine 21 e 22, il suo cubo *N* sarà compreso fra i cubi di 21 e di 22 decine, cioè fra 9261 e 10648 migliaia. Laonde il maggior cubo contenuto nelle migliaia di *N* è 9261, cioè il cubo delle 21 decine della radice. Dunque le decine della radice 218 sono la radice cubica del maggior cubo 9261 contenuto nelle migliaia del numero proposto *N*.

§ 6° — ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA.

Radice a meno d'un'unità de' Numeri interi.

457. — **Numeri aventi meno di quattro cifre.** Quando il numero da cui si vuol estrarre la radice cubica contiene meno di quattro cifre, la sua radice avendone una sola, questa si troverà direttamente col mezzo del seguente quadro, che fa d'uopo mandare a memoria.

Numeri d'una sola cifra	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, 9.
Loro cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512, 729.

Se il numero proposto è uno de' cubi perfetti 1, 8, 27, 64,..., la sua radice cubica sarà il numero corrispondente 1, 2, 3, 4,...,

Esempio $\sqrt[3]{512} = 8$.

Se poi il numero proposto non è cubo perfetto, la sua radice a meno d'un'unità sarà (454) quella del maggior cubo in esso

contenuto; il quale si può facilmente scorgere mediante il suddetto quadro.

Esempio. La radice cubica a meno d'un'unità di 426 è uguale alla radice cubica di 343, che è 7: dunque $\sqrt[3]{426}$ a meno d'una unità $= 7$.

458. — ***Numeri aventi più di tre e meno di sette cifre.*** Proponiamoci di estrarre la radice cubica dal numero 17576.

La richiesta radice avrà due cifre (455); e siccome il cubo di essa è il numero proposto 17576, questo numero è la somma di quattro parti (438), cioè: il cubo delle decine della radice, il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità, ed il cubo delle unità. Laonde rappresentando con a le decine della radice, con b le unità della medesima, si avrà

$$17576 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Coll'aiuto di quest'uguaglianza, perverremo a determinare la cifra a ragionando in questo modo.

Poichè a rappresenta decine, il suo cubo a^3 è un numero esatto di migliaia (438); e poichè esso trovasi nel numero proposto, deve essere tutto nelle 17 migliaia del medesimo. *Separiamo adunque con un punto le tre prime cifre a destra*, che non fanno parte di questo cubo.

	17.576	26	*Radice*
$a^3 =$	8000	$3a^2 = 3.2^2 = 12$	*Divisore*
Residuo	95.76	$3a^2b = 3.20^2.6 =$	7200
$3a^2b+3ab^2a+b^3 =$	9576	$3ab^2 = 3.20.6^2 =$	2160
		$b^3 = 6^3 =$	216
Residuo	0000	$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	9576

Il numero 17 essendo il cubo della cifra a (più alcune migliaia che possono provenire dalla somma delle altre parti), questa cifra si otterrà *estraendo a meno d'un'unità la radice cubica di* 17, il che dà 2; dunque $a = 2$ decine.

Formando il cubo di queste due decine, avremo la prima parte a^3, cioè $(20)^3 = 8000$; che sottratta dal numero proposto, il residuo 9576 non conterrà più che le tre altre parti; onde si ha

$$9576 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Questa nuova uguaglianza ci servirà a determinare il valore della cifra b. Ragionando così:

La parte $3a^2b$, la quale può scriversi in questa forma $3a^2 \times b$, essendo il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, rappresenta un numero esatto di centinaia (438); e poichè esso trovasi nel residuo 9576, deve essere tutto nelle 95 centinaia del medesimo. *Separiamo con un punto le due prime cifre a destra*, che non fanno parte di questo prodotto.

Poichè già conosciamo il valore di a, elevandolo al quadrato e moltiplicando questo per 3 avremo il valore di $3a^2$, cioè 12 decine. Quindi se 95 fosse esattamente il prodotto $3a^2 \times b$, avremmo un prodotto 95 ed uno de' suoi fattori 12; perciò l'altro fattore b si otterrebbe (116) col *dividere* 95 *per* 12, il che dà 7. Ma il numero 95 contiene pure le centinaia provenienti dalla somma delle altre due parti $3ab^2$ e b^3, le quali possono influire sul quoto della precedente divisione; cosicchè il 7 può essere troppo grande e conviene perciò verificarlo.

A questo fine *cerchiamo i valori delle tre parti* $3a^2b$, $3ab^2$ *e* b^3, *ponendo* 7 *invece di* b: siccome la somma di queste parti deve essere contenuta nel residuo 9576, se essa riesce maggiore, conchiuderemo che il 7 è troppo grande, e metteremo 6. Ora le suddette parti danno $3a^2b = 8400$, $3ab^2 = 2940$, $b^3 = 343$, donde $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 11683$; dunque il 7 è troppo grande. Ponendo il 6 si ha: $2a^2b = 7200$, $3ab^2 = 2160$, $b^3 = 216$, donde $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 9576$. Questa somma potendosi sottrarre dal residuo, conchiudiamo che $b = 6$; e per conseguenza la radice richiesta è 26.

459. — Per assicurarci che 26 è realmente la radice cubica di 17576 riflettiamo che avendo nel corso dell'operazione sottratto da 17576 successivamente tutte le parti costituenti il cubo di 26, questo cubo stesso venne sottratto; e giacchè il residuo fu nullo, il cubo di 26 è uguale a 17576. Per conseguenza

$$\sqrt[3]{17576} = 26.$$

460. — La dimostrazione precedente (458) si estende pure al caso in cui il numero proposto non è cubo perfetto; poichè trattandosi di estrarre la radice solamente a meno d'un'unità, i ragionamenti volgono sul maggior cubo in esso contenuto (454), e l'eccesso del numero proposto sopra questo cubo rimane intatto e costituisce un *resto* alla fine dell'operazione.

461. — In pratica si opera come segue:

17.576	26
8	$3.2^2 = 12$
95.76	$3.20^2.6 = 7200$
95.76	$3.20.6^2 = 2160$
00.00	$6^3 = 216$
	9576

Disposta l'operazione come qui accanto, separo 3 cifre verso la destra e dico: la radice cubica di 17 è 2, che scrivo alla radice. Il cubo di 2 uguaglia 8 migliaia, che sottraggo dalle 17 migliaia, e mi resta 9 accanto al quale abbasso il gruppo 576, il che mi dà il numero 9576. Separo due cifre a destra con un punto, prendo quindi il triplo del quadrato delle decine, il che mi dà il numero 12 per divisore, che scrivo sotto la radice. Divido 95 per 12, e mi assicuro poi se il quoto 6 sia convenevole effettuando i tre ultimi prodotti dei quali si compone il cubo; ottengo $7200+2160+216$; la cui somma $= 9576$ che sottratta dal 1° residuo, dà 0 per 2° residuo, ed in conseguenza 26 per la radice esatta di 17576.

Per ciò che fu detto su questo esempio s'intenderanno facilmente i due seguenti.

373.248	72		103.885	47	
343	$3.7^2 = 147$		64	$3.4^2 = 48$	
302.48	$3.70^2.2 =$	29400	398.85	$3.40^2.7 =$	33600
302.48	$3.70.2^2 =$	..840	398.23	$3.40.7^2 =$	.5880
000.00	$2^3 =$	8	*Resto*..62	$7^3 =$	..343
		30248			39823

462. — ***Numeri di sette o più cifre.*** Proponiamoci ora di estrarre la radice cubica da 23149125.

Questa radice avrà tre cifre (455); perciò le decine di essa formano un numero di due cifre; e siccome queste decine sono la radice cubica del maggior cubo contenuto nelle migliaia del numero proposto (456), siamo condotti, per ottenerle, a separare le tre cifre a destra e ad estrarre la radice cubica del numero risultante 23149 migliaia. Ora questo numero avendo solo cinque cifre, si opera come negli esempi precedenti (*il numero dato risulta così scomposto in gruppi di tre cifre, cominciando dalla destra*); il che dà 28, con 1197 migliaia per resto. Le decine della radice sono dunque 28.

23.149.125	285				
8	$3.2^2 = 12$	1° *divis.*		$3.28^2 = 2352$	2° *divis.*
151.49	$3.20^2.8 =$	9600		$3.280^2.5 =$	1176000
139.52	$3.20.8^2 =$	3840		$3.280.5^2 =$	..21000
11.971.25	$8^3 =$	..512		$5^3 =$	125
11.971.25		13952			1197125
00.000.00					

Abbassando accanto al resto il gruppo 125 si ha per residuo totale 1197125, il quale non contiene più che le tre ultime parti componenti il numero proposto, essendo già sottratta la prima, cioè il cubo delle 28 decine della radice. Ragionando ora su questo residuo come abbiamo fatto nel primo esempio (458), veniamo a conoscere che bisogna separare con un punto le due cifre a destra, e dividere il numero 11971 a sinistra del punto pel triplo quadrato delle decine, che è $3.28^2 = 2352$; si ottiene così 5 per quoto, il quale potrebbe essere troppo grande: lo verifichiamo formando le tre parti che debbono ancora contenersi nel residuo, come si vede a destra del quadro dell'operazione. La somma di queste parti è appunto 1197125, cioè uguale al residuo; laonde fatta la sottrazione, il resto essendo nullo, si conchiude che $\sqrt[3]{23149125} = 285$.

463. — Dai due esempi trattati si può dedurre la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da un numero intero lo si divida in gruppi di tre cifre ciascuno, cominciando a destra (l'ultimo può contenerne uno o due soltanto). Estraggasi la radice del massimo cubo contenuto nel primo gruppo a sinistra, e quindi sottraggasi da questo gruppo il cubo della radice ottenuta. Accanto al residuo si abbassi il gruppo seguente, e dal numero così formato separinsi due cifre a destra con un punto. Dividasi la parte sinistra di questo punto pel triplice quadrato della già trovata radice; si formi col quoto che ne risulta (il quale è considerato come esprimente la cifra delle unità), e colla prima cifra trovata (che è riguardata come formante quella delle decine), le tre ultime parti di cui si compone il cubo. La somma di queste tre parti sottratta dal numero formato col 1° residuo e col 2° gruppo determinerà il 2° residuo, accanto al quale si abbassi il gruppo seguente. Si operi sul numero così formato come sul primo, finchè tutti i gruppi sieno abbassati. Se alla fine dell'operazione l'ultimo residuo è nullo, la radice è* esatta; *se v'ha residuo, la radice trovata è quella del massimo cubo contenuto nel numero proposto, ed è* esatta a meno d'una unità.

464. — ***Avvertenze.*** Per non errare nell'estrazione della radice cubica, bisogna, come già dicemmo parlando della radice quadrata (420), avvertire che:

1° Se dopo aver abbassato un gruppo a destra del residuo precedente, e separate le due cifre a destra del numero risultante, la parte sinistra del punto non contiene il triplo quadrato della radice già ottenuta, si mette uno zero a destra di questa radice; quindi si abbassa il gruppo seguente, e si continua l'operazione.

2° Se una delle sottrazioni non lasciasse alcun residuo, e che il numero proposto finisse con uno o più gruppi di zeri non ancora abbassati, bisognerebbe scrivere a destra della radice ottenuta tanti zeri, quanti sono i suddetti gruppi.

3° *Una cifra posta alla radice è troppo piccola, quando il resto dell'operazione da cui essa proviene è maggiore del triplo quadrato della radice trovata, più il triplo della stessa radice.* (Dimostraz. analoga a quella del n° 420—3ª).

Radice cubica degl'Interi con data approssimazione.

465. — ***Approssimazione in frazioni ordinarie.*** Sia da estrarre la radice cubica di 5 a meno di $^1/_{12}$.

Si ha

$$5 = 5.\ \frac{12^3}{12^3} = \frac{5.12^3}{12^3}.$$

La radice di questa frazione è una frazione (449) i cui termini sono $\sqrt[3]{5.12^3}$ e $\sqrt[3]{12^3}$. Ora $\sqrt[3]{12^3} = 12$ esattamente, e $\sqrt[3]{5.12^3} = 20$ a meno d'un'unità. Risulta pertanto

$$\sqrt{5} = \sqrt[3]{\frac{5.12^3}{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{5.12^3}}{\sqrt[3]{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{8640}}{12} = \frac{20}{12},$$

e si dimostra, come al n° 421, che la frazione $^{20}/_{12}$ esprime, *a meno di* $^{1}/_{12}$, la radice cubica di 5.

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da un numero intero a meno d'una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore qualsivoglia numero, si moltiplica il numero dato pel cubo di questo denominatore, si estrae dal prodotto la radice cubica a meno d'un'unità, ed a questa radice si dà per denominatore quello che indica il grado d'approssimazione.*

466. — ***Approssimazione in decimali.*** Operando come nell'esempio precedente, si ha

$$\sqrt[3]{5} \text{ a meno di } \frac{1}{10} = \frac{\sqrt[3]{5.10^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{5000}}{10} = \frac{17}{10} = 1{,}7,$$

$$\sqrt[3]{29} \text{ » } \frac{1}{100} = \frac{\sqrt[3]{29.100^3}}{\sqrt[3]{100^3}} = \frac{\sqrt[3]{29000000}}{100} = \frac{307}{100} = 3{,}07,$$

$$\sqrt{7} \text{ » } \frac{1}{1000} = \frac{\sqrt[3]{7.1000^3}}{\sqrt[3]{1000^3}} = \frac{\sqrt[3]{7000000000}}{1000} = \frac{1912}{1000} = 1{,}912.$$

Questi esempi fanno vedere che la radice cubica si ottiene a meno di 0,1 scrivendo a destra del numero dato tre zeri, estraendo a meno d'un'unità la radice del numero risultante, e separando colla virgola una cifra a destra di questa radice; a meno di 0,01 scrivendo sei zeri a destra del numero dato, estraendo la radice del risultato a meno d'un'unità, e separando alla destra di questa due cifre; ecc. Laonde si conchiude che:

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da un numero intero con approssimazione in decimali, si aggiungono a destra del numero dato tanti gruppi di tre zeri, quante cifre decimali si vogliono alla radice; si estrae a meno d'un'unità la radice cubica del numero risultante, ed alla destra di questa si separano colla virgola tante cifre, quanti sono i gruppi di zeri aggiunti al numero dato.*

Estrazione della Radice cubica dalle Frazioni.

467. — ***Frazioni ordinarie.*** La frazione data essendo ridotta a' minimi termini, se questi sono cubi perfetti, tal è pure la frazione; nel caso contrario essa non è cubo perfetto (452).

1° Se la frazione data è cubo perfetto, la sua radice si otterrà estraendo separatamente la radice del numeratore e quella del denominatore, dando poi alla prima per denominatore la seconda.

Esempio $$\sqrt[3]{\frac{448}{875}} = \sqrt[3]{\frac{448:7}{875:7}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

2° Se poi la frazione proposta non è cubo perfetto, si opera come segue:

Sia la frazione $^5/_{12}$. Moltiplicando i due termini pel quadrato del denominatore 12, questo diventa cubo perfetto, senza che la frazione cambi valore; si ha perciò

$$\sqrt[3]{\frac{5}{12}} = \sqrt[3]{\frac{5.12^2}{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{5.12^2}}{\sqrt[3]{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{720}}{12} = \frac{8}{12}.$$

Il numeratore 8 è la radice cubica a meno d'un'unità del numero 720; si conchiude quindi che, per le ragioni accennate (421), la frazione $^8/_{12}$ esprime *a meno di* $^1/_{12}$ la radice cubica di $^5/_{12}$.

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da una frazione ordinaria, si riduce questa a' minimi termini. Se i due termini della frazione ridotta sono cubi perfetti, si estrae la radice del numeratore, poscia quella del denominatore, ed alla prima si dà per denominatore la seconda. Se i termini della frazione ridotta non sono cubi perfetti, si moltiplica il numeratore pel quadrato del denominatore, si estrae a meno d'un'unità la radice del prodotto, alla quale si dà per denominatore quello della frazione. La frazione risultante è la radice richiesta a meno dell'unità divisa pel denominatore.*

468. — ***Osservazione.*** Se il denominatore della frazione fosse cubo perfetto, ancorchè il numeratore non fosse tale, non occorrerebbe moltiplicare il numeratore, ma alla sua radice si darebbe per denominatore quella del denominatore dato.

469. — ***Frazioni decimali.*** Il numero delle cifre decimali è o non è *multiplo* di 3.

1° Se il numero delle cifre decimali è multiplo di 3, la frazione decimale data è equivalente ad una frazione ordinaria che ha per denominatore l'unità seguita da un numero di zeri multiplo di 3. In tal caso il denominatore è cubo perfetto; quindi la radice della frazione si otterrà secondo la regola precedente

(*osserv.*), estraendo la radice dal numeratore, cioè dal numero decimale considerato come intero, e dividendola per la radice del denominatore. Questa divisione si fa ponendo la virgola al posto conveniente. Si avrà, per esempio:

$$\sqrt[3]{9{,}528128} = \sqrt[3]{\frac{9528128}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{9528129}}{100} = \frac{212}{100} = 2{,}12.$$

2° Se poi il numero delle cifre decimali non è multiplo di 3, non è neppur tale il numero degli zeri del denominatore, e quindi questo non è cubo perfetto. Per renderlo tale, si aggiungerà ai due termini della frazione uno o due zeri, secondo che ne manca uno o due a rendere multiplo di 3 il numero di essi. Ciò fatto, la radice della frazione si otterrà come nel caso precedente.

Esempio:

$$\sqrt[3]{0{,}3745} = \sqrt[3]{\frac{3745}{10000}} = \sqrt[3]{\frac{374500}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{374500}}{100} = \frac{72}{100} = 0{,}72.$$

Si noti che aggiungere uno o due zeri ai due termini della frazione $\frac{3745}{10000}$, per es., torna lo stesso che aggiungerli alla destra delle cifre decimali 0,3745; giacchè $\frac{374500}{1000000} = 0{,}374500$. Quindi si può formolare la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da un numero decimale. Se il numero delle cifre decimali è multiplo di 3, si estrae a meno d'un'unità la radice del numero dato, considerandolo come intero ed alla destra di questa radice si separano colla virgola tante cifre, quanti gruppi di tre cifre decimali contiene il numero proposto. Se il numero delle cifre decimali non è multiplo di 3, lo si rende tale scrivendo alla sua destra uno o due zeri, poi si opera come si è detto.*

Radice cub. delle frazioni con data approssimazione.

470. — ***Frazioni ordinarie.*** Se il grado d'approssimazione con cui si vuole ottenere la radice cubica d'una frazione ordinaria è indicata da una frazione ordinaria, si opera come per l'approssimazione della radice dei numeri interi (465); giacchè questa regola è applicabile qualunque sia il numero dato, intero o frazionario.

Si debba per es. estrarre a meno di $^1/_{15}$ la radice cubica di $^6/_7$.

Si avrà da prima, secondo la citata regola,

$$\frac{6}{7} \times 15^3 = \frac{20250}{7} = 2892 + \frac{6}{\text{—}}$$

dal qual numero frazionario conviene quindi estrarre la radice a meno d'un'unità, e darle per denominatore il 15. Ora la radice cubica a meno d'un'unità di un numero frazionario è quella stessa della parte intera del medesimo (454). Si ha dunque

$$\sqrt[3]{\frac{6}{7}} \text{ a meno di } \frac{1}{15} = \frac{\sqrt[3]{2892}}{15} = \frac{14}{15}.$$

471. — Se poi il grado d'approssimazione è indicato da una frazione decimale, si opera come segue:

Debbasi estrarre la radice cubica da $^6/_7$ a meno di 0,001.

Si ha

$$\frac{6}{7} = 0{,}857142857142....$$

Ora, poichè ogni gruppo di tre cifre decimali dà una cifra decimale alla radice (469) per avere la radice di $^6/_7$ a meno di 0,001, basterà prendere nella frazione decimale equivalente le nove prime cifre, ed estrarre la radice del numero decimale risultante. Si ha dunque

$$\sqrt[3]{\frac{6}{7}} \text{ a meno di } 0{,}001 = \sqrt[3]{0{,}857142857} = 0{,}949.$$

Regola. — *Per estrarre la radice cubica da una frazione ordinaria coll'approssimazione in decimali, la si riduce in una frazione decimale che abbia un numero di cifre triplo di quello che si vuole avere alla radice, quindi si estrae la radice cubica dalla frazione decimale ottenuta.*

472. — ***Frazioni decimali.*** Quando la frazione da cui si vuole estrarre la radice cubica è una frazione decimale, l'approssimazione si suole determinare in decimali. Basta perciò prendere nella frazione data un numero di cifre decimali triplo di quello che si vuole avere alla radice (n° ant.), ed estratta la radice del numero risultante porre la virgola al debito luogo.

Debbasi estrarre la radice cubica da 3,1415 a meno di 0,01.

Si aggiungono due zeri per rendere sufficiente il numero dei decimali: quindi si ha

$$\sqrt[3]{3{,}141500} = 1{,}46.$$

§ 7° — ESTRAZIONE DI ALCUNE RADICI di grado superiore al terzo.

473. — La maggior parte dei teoremi relativi alla seconda e terza potenza dei numeri sono estendibili, con qualche modifica-

zione, alle potenze di grado superiore. Prescindendo da tutti gli altri, non sarà fuor di proposito dimostrarne qui uno, il quale somministra il mezzo di estrarre qualsivoglia radice, il cui indice non abbia altri fattori primi che 2 e 3.

474. — ***Teorema.*** *Per elevare qualsivoglia potenza d'un numero ad una potenza qualsiasi, si moltiplicano tra loro gli esponenti indicanti le due potenze.*

Si avrà p. es. $(7^3)^5 = 7^{3.5} = 7^{15}$, $(9^4)^6 = 9^{4.6} = 9^{24}$,
ed in generale

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Si dimostra questo teorema come quelli dei n^i **394** e **443**, i quali sono soltanto casi particolari di esso.

475. — ***Corollario 1°.*** *Si eleva un numero a alla* n^esima *potenza, elevandolo successivamente alle potenze indicate dai fattori* p, q, r, . . . *dell'esponente* n.

In fatti, elevando a alla p^{esima} potenza, poi questa alla q^{esima} e quindi quest'ultima alla r^{esima}, si ottiene successivamente

$$a^p,\ a^{pq} \text{ e } a^{pqr}.$$

Ma p, q, r essendo i fattori di n, si ha $pqr = n$; quindi

$$a^n = a^{pqr}.$$

Esempio. — Vogliasi elevare il numero 7 alla 12ª potenza.

Poichè $12 = 3.2.2$, si avrà da prima $7^3 = 343$, quindi $7^6 = (343)^2 = 117649$, poscia $7^{12} = (117649)^2 = 13841287201$.

476. — ***Corollario 2°.*** L'estrazione della radice essendo un'operazione inversa alla formazione delle potenze, si avrà *reciprocamente* che:

Si estrae la radice n^esima *da un numero estraendone successivamente le radici indicate dai fattori* p, q. r, . . . *dell'indice* n.

Esempio 1° — Vogliasi estrarre la radice 12ª di 13841287201.

Poichè $12 = 2.2.3$, si otterrà la richiesta radice estraendo dal numero proposto la radice quadrata, da questa la quadrata ancora, e da quest'ultima la cubica; il che s'indica

$$\sqrt[12]{13841287201} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{13841287201}}}.$$

Ora si ottiene

$$\sqrt{13841287201} = 117649,\ \sqrt{117649} = 343,\ \text{e}\ \sqrt[3]{343} = 7;$$

$$\text{dunque}\ \sqrt[12]{13841287201} = 7.$$

Esempio 2° — Abbiasi da estrarre la radice 6ª di 2985984.

Essendo $6 = 2.3$, si ha

$$\sqrt[6]{2985984} = \sqrt[3]{\sqrt{2985984}}.$$

Ora, $\sqrt{2985984} = 1728$ e $\sqrt[3]{1728} = 12$;

dunque $\sqrt[6]{2985984} = 12$.

Esempio 3° -- Debbasi ancora estrarre la 27ª radice dal numero 134217728.

Essendo $27 = 3.3.3$, si ha

$$\sqrt[27]{134217728} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{134217728}}}.$$

Ora, $\sqrt[3]{134217728} = 512$, $\sqrt[3]{512} = 8$ e $\sqrt[3]{8} = 2$;

dunque $\sqrt[27]{134217728} = 2$.

Osservazione. — I fattori 2 e 3 dell'indice possono venire presi in qualsivoglia ordine, cioè si può indifferentemente estrarre prima le radici cubiche, poi le quadrate, ovvero estrarre prima le quadrate, poi le cubiche; tuttavia l'ultimo modo riesce assai più semplice.

Problemi sull'Estrazione della radice cubica.

237. Trovare la radice cubica di 132651; 357911; 592704; 1124864; 5725732069 e 729729243027000.

238. Qual è la radice cubica di 87; 390; 84576; 349579 a meno di un centesimo, e di 2; 7; 50; 84; 32 a meno di un millesimo?

239. Si cerchi la radice cubica a meno di un millesimo dei numeri decimali 36,04; 789,0001; 9875,365; ed a meno d'un centesimo di questi altri 6,90; 4,375; 817,3900.

240. Trovisi la radice cubica a meno di un centesimo di 0,0001; 0,0046; 0,304376; 0,00009; 0,002; 0,10904.

241. Cerchisi la radice cubica delle frazioni: $^{512}/_{1728}$; $^{6859}/_{12167}$; $^{3}/_{1728}$; $^{6}/_{343}$; $^{17}/_{21}$; $^{45}/_{19}$.

242. Qual è la radice cubica, a meno di un millesimo, delle seguenti frazioni: $^{64}/_{125}$; $^{29791}/_{42875}$; $^{8872}/_{24389}$; $^{517}/_{4913}$; $^{3}/_{7}$; $^{729}/_{1331}$; $^{8}/_{17}$; $^{1}/_{17}$?

243. Qual è per approssimazione la radice cubica dei seguenti

numeri: 15 a meno di $^1/_2$; 47 a meno di $^1/_{20}$; $^5/_7$ a meno di $^1/_{30}$; 23 $^7/_8$ a meno di $^1/_{13}$?

244. Pippo e Gigi hanno insieme 19 anni; l'età del più giovane è uguale al $^1/_3$ della radice cubica del $^1/_4$ di 37044. Qual è l'età di ciascuno?

245. Qual è il numero di cui il $^1/_3$ del cubo è 39304?

246. Trovare il valore d'un'opera in 13 volumi, sapendo che il prezzo di uno moltiplicato pel suo quadrato dà ll. 274625.

247. Geronimo comprò 84 Cg. di crine ad un prezzo tale, che i $^{13}/_{15}$ del suo cubo diminuiti dei $^7/_9$ dello stesso cubo, danno ll. 0,6591; quanto dovette sborsare?

248. Comprai panno da ll. 6,75 il m., ed in tal quantità, che moltiplicando il quadrato della somma sborsata pei $^5/_9$ della medesima ottengo ll. 295245. Qual fu il numero dei metri comprati?

249. Apollonio comprò orciglia da ll. 1,70 il Cg., e cacciù da ll. 1,50; il cubo della somma totale sborsata è 3442951, e quello della differenza tra il valore di ciascuna merce 571787; dicasi quanti Cg. d'ogni materia abbia comprati, sapendo che per l'orciglia spese meno che non pel cacciù.

250. Dividendo la quarta potenza di un numero pel numero stesso, si ottiene 2077552576; qual è questo numero?

251. Giorgio compra cotone a ll. 2,80 il Cg.; quanto dovrà sborsare se ogni balla pesa 75 Cg.; ed il cubo del loro numero, diviso pel numero stesso dà 2025?

252. Compraronsi 145 Eg. di scorza di limone per una somma tale, che il cubo di essa, diviso pel quadrato della medesima, dà ll. 10,15; qual è il prezzo del chilogramma?

253. Quanto dovrò spendere per Cg. 2685 di cotone, se 7,065 è il quoto che ottiensi dividendo il cubo del prezzo d'un Cg. pei $^2/_3$ del suo quadrato?

254. Geltrude reca al mercato ostriche di due qualità; il numero delle ceste di ciascuna è tale, che i $^3/_{17}$ della somma dei cubi di questi numeri uguagliano 47304. Vendendo le prime a ll. 10,25 la cesta, riceve ll. 492; quanto ricaverà dalle altre, ove le venda ll. 0,75 di più il cesto?

255. Il numero dei metri di panno venduti a ll. 32,75 il m. essendo moltiplicato separatamente per 2, per 7 e per 9, ottengonsi tre risultati il cui prodotto è 2765952; quanto ricevetti?

256. Quanto mi toccherà spendere per 15 dozzine di salviette, se il prezzo d'ogni dozzina è tale, che moltiplicando tra loro i suoi $^5/_6$, $^3/_4$ e $^2/_9$ si ha per prodotto ll. 4723,92?

257. Senza estrarla dicasi qual sia la radice cubica di 474552, sapendo che questo numero è il cubo di un altro di 2 cifre.

258. Trovinsi tre numeri, che ad un tempo siano quadrati e cubi perfetti.

259. In qual sistema di numerazione il numero 8 si scrive 1000?

260. Qual è il sistema di numerazione in cui il numero 221 viene espresso colle cifre 1005?

261. Il numero 64 si scrive 100 in un sistema, e 1000 in un altro; quali sono questi due sistemi?

262. Trovare la radice quarta di 20736, la sesta di 1771561 e la dodicesima di 531441.

Problemi di Ricapitolazione sulla 1ª Parte.

263. Quanto costeranno quattro soffitti a stuoia in forma di volta, ciascuno di m. q. 12 $^1/_3$, a ll. 3,36 il m. quadrato?

264. Per 25 giorni di lavoro, 8 operai ricevettero ll. 700; uno di essi guadagnava il triplo, e quattro altri il doppio dei rimanenti. Quanto ricevette ciascuno?

265. Chilogr. 100 di grano ne producono 25 di crusca e 75 di farina, la quale assorbisce i $^2/_3$ del suo peso d'acqua; ove la cottura alleggerisca di $^1/_5$ la pasta, dicasi quanto pane si ritrarrà da 1 Cg. di grano.

266. Qual è il prezzo di una melarancia, se comprandone 24 mi avanzano ll. 0,75, e mi mancano ll. 1,05 per comprarne 30?

267. *A* dice a *B:* Dammi 8 mele e ne avremo un ugual numero. — Dammene tu 8, risponde questi, ed io ne avrò il doppio di te. Quante mele ha ciascuno?

268. L'annuo salario d'un domestico è fissato a ll. 240 con un vestito; ma dopo 8 mesi vien licenziato, e riceve ll. 120 oltre il vestito. Quanto vale questo?

269. Una lepre dopo fatti 82 salti, viene inseguita da un cane, il quale ne fa 9 mentre essa ne fa 13. Se tre salti del cane ne valgono 5 della lepre, quanti dovrà farne per raggiungerla?

270. Togliendo da un numero la frazione $^3/_8$, si ha per residuo la sua reciproca $^8/_3$. Qual è questo numero?

271. Qual è la lunghezza dell'albero maestro d'una fregata, sapendo che 5 m. più dei suoi $^2/_3$ sorgono dal ponte, e 7 m. più del $^1/_7$ sono sotto?

272. In un'ora *A* Percorrerebbe 4 Cm. e *B* 6: se partono insieme dall'estremità di un viale lungo 1 Cm., a qual distanza dall'altra estremità si incontreranno quando *B* ritornerà indietro?

273. Mi mancano 12 nocciuole, diceva Agnese a' suoi nipotini, per darvene 6 ciascuno; dandovene solo 4 me ne avanzano 6. Quanti erano i bimbi?

274. Orazio, morendo, lascia al primogenito $^1/_4$ del suo avere, al 2° $^1/_3$ del resto, al 3° $^1/_2$ del nuovo resto, ed al 4° le rimanenti 6400 lire. Dicasi il montante dell'eredità, e la parte d'ognuno.

275. Aggiungendo la frazione $^3/_7$ ad un numero, e moltiplicando per $^3/_7$ la somma risultante, ottiensi quest'istesso numero. Cercalo.

276. Scompongasi il numero 6 in due parti, per modo che il quoto della maggiore divisa per la minore sia lo stesso numero 6.

277. Delfina ed Eulalia portano al mercato, l'una 30 dozzine d'uova, l'altra 24; la 1ª ne dà una all'esattore del dazio e paga inoltre 2 soldi, la 2ª ne lascia pure una, ma riceve 2 soldi. Quanto costa la dozzina?

278. Quinzio comprò due ceste di mele a 5 cent. ogni dieci; la 1ª che era i $^4/_5$ della 2ª ne conteneva 300 di meno. Quanto spese in tutto?

279. Nestore, dopo trascorso $^1/_4$ dell'età sua, entrò nell'avvocatura, e l'esercitò ben 35 anni; passò quindi il restante $^1/_5$ di sua vita in ritiro. In qual età morì egli?

280. Un premio di ll. 1300 deve spartirsi tra un colonnello, un maggiore, un capitano ed un luogotenente, in guisa che per ogni grado la quota aumenti di una metà. Quanto riceverà ciascuno?

281. Qual è il netto guadagno fatto su 112 Cg. di zuccaro pagato ll. 1,20 il Cg., se nel rivenderlo si guadagna 50 % su 84 Cg., e perdesi 25 % sul rimanente?

282. Un capitano vuol disporre in quadrato i suoi soldati, e trova mancarne 41; diminuisce di uno ogni fila ed allora gliene avanzano 100. Quanti erano essi?

283. Comprai zuccaro per ll. 400 e lo vendei a lire 10 % di perdita; se impiego il danaro ricavato in canapa, sulla quale guadagno ll. 15 %, qual sarà il guadagno o la perdita *per cento* nei due contratti insieme?

284. Il pedaggio del ponte Maria Teresa in Torino è fisso a 5 centes. per ogni pedone, centesimi 15 per un cavallo, e centesimi 30 per una vettura. Ora, se mentre passano 18 vetture e 34 cavalli, passano 112 pedoni, quanti di ciascuna categoria saranno passati quando l'esattore avrà percepito ll. 112,70?

285. Si domanda il valore d'un bastimento e quello del carico, sapendo che i $^5/_9$ del 1° sono i $^5/_7$ del 2°, e ll. 50000 n'è la differenza.

286. Quanto costò una merce sulla quale, a ragione di lire 8 % si è perduto ll. 75,50?

287. Cinque mila soldati son disposti in modo, che il numero delle file è 8 volte quello degl'individui contenuti in ognuna di esse. Quante sono le file, e quanti soldati su ciascuna?

288. Quintino spende annualmente $^1/_3$ del suo stipendio, il quale viene ogni anno aumentato di $^1/_3$. Se dopo 4 anni egli ha risparmiato ll. 6475, qual era lo stipendio del 1° anno?

289. Teodoro vendendo le sue pecore a 16 ll. l'una ricaverebbe ll. 3600; s'egli ne vende prima $^1/_3$, poi i $^2/_9$ e quindi i $^2/_5$, quante gliene rimangono?

290. Invece di 340 El. di carbone da Mg. 7 $^7/_9$ l'uno, ne ricevetti 300 El., pesanti in tutto quanto i primi. Cerchisi il peso dell'ettolitro.

291. Nel rivendere a 4 per 15 centes. un canestro di pere pagate 10 centes. ogni 5, si guadagnò ll. 3,50; quante pere conteneva il canestro?

292. Nicola comprò mele pagandole metà a 5 centes. ogni 4, e metà a 3 centes. ogni 3; dicasi quante ne abbia comprate, se nel rivenderle a 10 centes. ogni 7 perdè ll. 0,15.

293. Due fabbri attaccano spagnolette alle finestre d'un palazzo; il 2°, che comincia 9 ore più tardi, ne pone 3 in 4 ore, ed il 1° soltanto 2 in 3 ore. Fra quante ore ne avranno posto un egual numero?

294. Lire 378 sono il prezzo di due scialli, di cui uno vale i $^{5}/_{13}$ dell'altro; qual è il valore d'ognuno?

295. I $^{3}/_{4}$ più i $^{5}/_{9}$ del triplo della somma che ho, superano di ll. 43,75 detta somma; qual è il mio avere?

296. Nanni paga in contanti i $^{9}/_{80}$ del prezzo d'un puledro comprato; quindi per compire il pagamento dà un cavallo valutato ll. 453, e gli vien restituita una somma uguale al valore del puledro. Quanto vale quest'ultimo?

297. Compro tre orologi per ll. 1256, pagando il 1° i $^{2}/_{3}$ de $^{4}/_{5}$ dei $^{5}/_{6}$ del 2°, e questo i $^{7}/_{3}$ dei $^{4}/_{5}$ del 3°; qual è il valore di ciascuno?

298. Qual somma mi converrà impiegare nella paga de'miei operai, sapendo che al 1° debbo i $^{2}/_{5}$ di essa, e che la parte del 2°, inferiore a quella del 1° di $^{8}/_{45}$ della somma, dev' essere di 56 lire?

299. Balbo, che ha da fare m. 7 $^{2}/_{3}$ di lavoro, comincia alle 5 $^{1}/_{4}$ di mattino, e ne fa $^{5}/_{8}$ di m. all'ora. A che ora l'avrà terminato?

300. Un reggimento doveva partire il 4 del mese per giungere a destinazione il 22; ma avuto quindi l'ordine di giungere il 16, si aumenta di Cm. 9 $^{3}/_{4}$ il cammino d'ogni dì. Qual distanza aveva da percorrere?

301. Il presidio di una fortezza è munito per 120 giorni, ma lo si aumenta di $^{1}/_{3}$; a quanto dovrassi ridurre la razione del soldato, perchè i viveri durino 105 giorni?

302. Se aggiungo 23 ai $^{5}/_{14}$ della somma pagata per Cg. 680 di scorza d'ontano, e se divido per 12 il risultato, ottengo 9 per quoto. Qual è il prezzo del chilogramma?

303. Una ruota di 144 denti s'incastra in altra di 96, e questa in una terza di 48; posto che la 1ª faccia 100 giri il minuto, quanti ne faranno le altre due nello stesso tempo?

304. Ove si aggiungessero ll. 40,44 alla somma sborsata per un otre d'olio, il totale sarebbe tanto superiore a ll. 150, quanto la somma stessa ne differisce. Qual fu l'ammontare dell'olio?

305. Il prodotto di due numeri è 140, e diventerebbe 112, se il moltiplicando si diminuisse di 4; quali sono essi?

306. Chilogr. 75 di antali e 60 di corna di cervo, furono pagati ll. 288; la 1ª merce costando al Cg. quattro volte più della 2ª, qual è il prezzo del chilogramma di ciascuna?

307. Ambrogio ha 35 anni e suo figliuolo 12; fra quanti anni l'età del 1° sarà due volte quella del secondo?

308. Quanti anni sono che l'età di Gaspare era doppia di quella del figliuol suo, se quegli ha 57 anni e questi 34?

309. Celebrasi una festa ogni 14 anni da certa nazione, ogni 18 da un'altra, e ogni 24 da una terza; a quanti anni di intervallo verrà essa celebrata contemporaneamente dalle tre nazioni?

310. Avendo comprati m. 123 di stoffa da ll. 13 il m., e rivendutone già $^1/_3$ a ll. 14, a quanto bisognerà vendere il restante per guadagnare ll. 387 sul tutto?

311. Pagando certa somma, Martino ottiene di far pascolare 45 pecore per mesi 6 $^1/_2$; ora, se dopo mesi 2 $^2/_3$ le aumenta di 20, quanto tempo potrà ancora lasciare il gregge al pascolo?

312. In una speculazione le spese consumarono $^1/_{16}$ del capitale, e si guadagnò $^3/_{14}$ del medesimo; qual era il capitale, sapendo che in tutto si ritrassero ll. 449,50?

313. Colla somma ricavata da 138 m. di panno, quanto potrò comprarne d'altra qualità, se 3 m. di questa valgono quanto 5 della prima?

314. Osvaldo empie il suo bicchiere di vino e ne beve $^1/_4$; lo riempie d'acqua e ne beve $^1/_3$; torna riempirlo di nuova acqua e ne beve $^1/_2$. Quanto vino troverassi ancora nel bicchiere?

315. Sigifredo avendo trovata una somma, nè potendo scoprirne il proprietario, dà ll. 1200 ed $^1/_5$ del resto all'ospedale, ll. 3000 e $^1/_2$ del 2° resto ai poveri, e impiega le rimanenti lire 258 a pro delle scuole comunali. Qual era l'intera somma?

316. Da 15 giorni due operai attendono ad un certo lavoro, e ne rimane ancora la $^1/_2$ dei $^3/_4$; in quanto tempo lo condurranno a termine?

317. Alle ore 11 e 25 minuti di sera un convoglio parte dalla città *B* verso *C*, percorrendo Cm. 48,30 all'ora; ad 1 ora e 40 minuti di mattino parte un altro da *C* per alla volta di *B*, facendo Cm. 64,25 l'ora. Le due città distando di Cm. 527,70, a che ora s'incontreranno i convogli?

318. Se l'acqua congelandosi aumenta di $^1/_{11}$ del suo volume, quanto perderà del suo il ghiaccio nel liquefarsi?

319. Con 22 lire compro 6 Cg. d'olio di 1ª qualità e 4 di 2ª; volendone 7 Cg. della 1ª e 8 della seconda dovrei pagare 31 lire. Qual è il prezzo d'ogni qualità?

320. Compro da prima 53 El. di frumento e 46 di segala per ll. 2716,56, quindi 73 El. di frumento e 37 di segala per ll. 3367,11. A quanto debbo rivendere ogni derrata per guadagnare sulla 1ª ll. 0,75 l'El., e sulla 2ª ll. 0,45?

PARTE SECONDA

SISTEMA METRICO-DECIMALE, MISURE ANTICHE, NUMERI COMPLESSI

Preliminari sulle Misure in generale.

477. — Nei calcoli usuali si considerano ordinariamente *sei specie* di quantità, cioè: di *lunghezza*, di *superficie*, di *volume*, di *capacità*, di *peso* e di *valore*. Per conoscere una quantità bisogna *misurarla*.

478. — **Misurare una quantità** vuol dire cercare quante volte essa contiene un'altra quantità *cognita* che dicesi **unità di misura,** o semplicemente **misura.**

L'unità di misura deve necessariamente essere della medesima specie della quantità che si vuole misurare. Cosicchè si adopera una *linea* per misurare le lunghezze, ossia le *linee;* una *superficie* per misurare le superficie, un *volume* per misurare i volumi, ecc.

479. — Da ciò risulta che:

Vi sono sei sorta di misure, cioè di **lunghezza,** di **superficie,** di **volume,** di **capacità,** di **peso,** e di **valore.**

CAPO I.

SISTEMA METRICO DECIMALE (*).

§ 1° — MISURE METRICHE IN GENERALE.

480. — Tutte le misure legali in uso nel Regno hanno per base il *metro* e sono regolate sul sistema di numerazione *decimale*, perciò il complesso di esse dicesi **sistema metrico-decimale.**

(*) Per maggiori sviluppi sul Sistema metrico-decimale vedi l'Opera nostra intitolata: *Norma Teorico-pratica per l'Insegnamento del Sistema metrico.*

481. — Il **metro** uguaglia il decimilionesimo del quarto del meridiano terrestre.

482. — Le unità principali del sistema metrico sono:

1° Il **metro** per le misure di lunghezza.

2° { Il **metro quadrato** per le superficie.
L'**ara** per le misure agrarie.

3° { Il **metro cubo** per le misure di volume.
Lo **stero** per la legna da fuoco.

4° Il **litro** per le misure di capacità.

5° Il **gramma** per le misure di peso.

6° La **lira italiana** per le misure di valore.

483. — Per esprimere i multipli ed i sottomultipli delle unità principali si usano i vocaboli:

Multipli	**Deca**	che vuol dire	*dieci unità*
	Etto	»	*cento* »
	Chilo	»	*mille* »
	Miria	»	*diecimila* »
Sottomultipli	**Deci**	»	*decimo dell'unità*
	Centi	»	*centesimo* »
	Milli	»	*millesimo* »

484. — Queste voci si abbreviano come segue:

Deca colla maiusc.		*D.*	*Deci* colla minuscola		*d.*	*Metro*	*m.* ovv.	*met.*
Etto	»	*E.*	*centi*	»	*c.*	*Ara*	*a.* »	*ar.*
Chilo	»	*C.*	*milli*	»	*m.*	*Stero*	*s.* »	*st.*
Miria	»	*M.*				*Litro*	*l.* »	*lit.*
						Gramma	*g.* »	*gr.*
						Lira italiana		*ll.*
						ovvero *L. it.*		

Il *chilo* in commercio s'abbrevia pure con un *K*.

§ 2° — MISURE DI LUNGHEZZA.

485. — Dicesi **lunghezza** l'estensione considerata sotto una sola dimensione, cioè come linea, senza larghezza nè spessore.

Tal è l'altezza d'un edifizio, la distanza fra due città, ecc.

486. — L'unità principale delle misure di lunghezza è il **metro.**

487. — I multipli del metro sono: il *decametro*, l'*ettometro*, il *chilometro* ed il *miriametro*. — I sottomultipli sono: il *decimetro*, il *centimetro* ed il *millimetro*.

488. — Per le distanze geografiche si piglia per unità il *miriametro*, il *chilometro* e l'*ettometro*, le quali si dicono **misure itinerarie.**

489. — ***Misure effettive.*** Per *misure effettive* s'intendono quelle che realmente esistono, e che si adoperano per *effettuare* la misurazione delle varie quantità.

Le misure effettive di lunghezza sono: il *decametro*, il *metro* col loro doppio e colla loro metà, ed il *decimetro* col suo doppio. Il *trimetro* o *canna metrica* è tollerato dalla legge per la sua comodità in agrimensura.

Problemi sulle Misure di lunghezza.

321. Dionigi compra 35 dm. di panno a ll. 23,50 il m.; ne impiega 16 dm. in un paio di calzoni ed il rimanente in un pastrano. Dicasi il valore dei due oggetti, sapendo che pel primo pagò ll. 4,50 di fattura e pel secondo ll. 30.

322. Virginio può fare al dì circa 7 dm. di tela a ll. 0,25 per ogni dm.; quante settimane metterà egli per guadagnare ll. 60?

323. Una strada lunga Mm. 54,18 è mantenuta da più appaltatori, ciascuno de' quali ha da provvedere per Em. 21 $^1/_2$; quanti sono essi?

324. Gennaro impiega 9 ore e mezzo per fare dm. 6 $^1/_2$ di lavoro; quanto tempo impiegherà per farne Dm. 6 $^1/_2$?

325. Un battello a vapore percorre Dm. 35,5 ogni minuto; quanti Mm. farà in 16 giorni e 15 minuti?

326. Se m. 8,75 di nastro costano ll. 29,75, qual è il prezzo del decimetro?

327. Qual è il prezzo d'un metro di velluto, se 45 cm. si pagano ll. 4,05?

328. Ansaldo, facendo 15 Cm. e 3 metri il dì, percorse 75 Mm. e 15 Dm.; di quanti giorni fu il suo viaggio?

329. In 5 giorni un battello a vapore fece 216 Mm.; quanti Cm. faceva all'ora?

330. Quanto costarono le traversine di una via ferrata lunga 198 Cm., sapendo: 1° ch'essa è d'un solo binario, 2° che la distanza dall'una traversina all'altra è di 12 dm., 3° che stante le varie stazioni debbonsene contare 21 invece di 20, 4° che il prezzo medio d'ognuna è di ll. 5,70?

331. Essendosi misurato il filo di 4 bozzoli, si trovò il 1° lungo Em. 5,84, il 2° Dm. 15,38 meno del 1° e m. 48,63 meno del 3°, ed il 4° quanto i due primi insieme meno $^1/_2$ Cm.; se ne esprima in Cm. la lunghezza totale.

332. Marcantonio ha da trasportare un mucchio di carbon fossile alla distanza di 36 met.; quanti Cm. percorrerà egli al

giorno e quanti Mm. la settimana, posto che faccia 290 gite il dì e lavori 6 dì la settimana?

333. Un viale è fiancheggiato da 285 alberi distanti l'un dall'altro m. 2,5; qual è la sua lunghezza, se il 1° e l'ultimo distano m. 1,75 dalle estremità?

334. Lucillo percorse una strada di 18 Mm. camminando 10 ore il dì colla velocità di m. 1,60 ogni minuto secondo; dicasi quanti giorni impiegò, e quanti passi fece, posto che ciascuno sia di m. 0,65?

335. Un viaggiatore camminò due giorni; nel 1° a ragione di ll. 0,05 ogni 3 Em. e $^1/_4$, e nel 2° a ll. 0,025 ogni 11 Dm. Esprimasi in chilometri la lunghezza della strada percorsa sapendo che ricevette ll. 5 il dì.

§ 3° — MISURE DI SUPERFICIE.

490. — Si chiama **superficie** l'estensione considerata sotto due dimensioni, cioè lunghezza e larghezza, senza spessore.

Tal è l'estensione d'un foglio di carta, d'una pezza di stoffa d'un campo, ecc.

Il risultato della misurazione d'una superficie dicesi **area.**

491. — L'unità principale delle misure di superficie è il **metro quadrato,** cioè *un quadrato i cui lati hanno un metro di lunghezza.*

492. — I multipli del metro quadrato sono: il *miriametro quadrato* (quadrato di 10000 metri di lato), il *chilometro quadrato*, l'*ettometro quad.* ed il *decametro quad.* — I sottomultipli sono: il *decimetro quadrato*, il *centimetro quad.* ed il *millimetro quad.*

493. — Si dimostra in geometria che *ciascuna unità dei diversi ordini delle misure di superficie vale 100 volte l'unità dell'ordine immediatamente inferiore.* Così il *Mm.q.* vale 100 *Cm.q.*, il *Cm.q.* vale 100 *Em.q.*..... il *m.q.* vale 100 *dm.q.*, il *dm.q.* vale 100 *cm.q.*..... Inversamente ci vogliono 100 unità d'un ordine per farne una dell'ordine immediatamente superiore, cioè 100 *mm.q.* per fare un *cm.q.*, 100 *cm.q.* per fare un *dm.q.*..... Da ciò segue naturalmente che ciascun ordine delle differenti unità di superficie vuol essere rappresentato da due cifre, di cui la prima a sinistra rappresenterà le decine e l'altra le unità dell'ordine che si considera. Perciò il numero *Em.q.* 26,3904 si leggerà 26 *Em.q.* 39 *Dm.q.* e 4 *m.q.*, ovv. 26 *Em.q.* e 3904 *m.q.* Il numero *m.q.* 9,036 si leggerà: 9 *m.q.*, 3 *dm.q.* e 60 *cm.q.*; ovv. 9 *m.q.* e 360 *cm.q.*

494. — Per misurare l'estensione d'uno Stato, d'una provincia, d'un mandamento, ecc., si piglia per unità l'*et-*

tometro quadrato, o il *chilometro quadrato* od il *miriametro quadrato*, che si dicono **misure topografiche.**

495. — Per valutare la superficie dei campi, prati, boschi, ecc., si adopera l'**ara,** *che è un quadrato di* 10 *metri di lato e* 100 *di superficie.*

L'*ara* ammette un solo multiplo, che è l'*ettara* (100 *are*), ed un solo sottomultiplo, la *centiara* ($^1/_{100}$ dell'*ara*).

L'*ettara*, l'*ara* e la *centiara* diconsi **misure agrarie.**

496. — ***Modo di valutare le superficie.*** Le superficie non si misurano come le lunghezze, paragonandole direttamente colla loro unità, vale a dire, non esistono misure effettive di superficie; ma con metodi speciali forniti dalla geometria l'area di esse vien dedotta dai numeri esprimenti le lunghezze delle loro dimensioni. Questi metodi, che variano secondo la configurazione della superficie da misurarsi, verranno da noi qui semplicemente indicati, affinchè nella soluzione dei problemi susseguenti si possano all'uopo richiamare.

L'area del **quadrato** *è uguale al prodotto di un lato moltiplicato per se stesso.*

L'area del **rettangolo** *è uguale alla base moltiplicata per l'altezza.*

L'area del **rombo** *è uguale al prodotto della base per l'altezza.*

L'area del **triangolo** *è uguale alla base moltiplicata per la metà dell'altezza.*

L'area del **trapezio** *è uguale alla semisomma delle due basi moltiplicata per l'altezza.*

L'area del **poligono regolare** *è uguale al prodotto del perimetro, per metà l'apotema.*

L'area del **poligono irregolare** *è uguale alla somma delle aree dei triangoli che lo compongono.*

Circolo. — *Il* **rapporto** *della circonferenza al diametro uguaglia* $^{22}/_7$, *ovvero con maggiore approssimazione* 3,1416.

Il **diametro** *uguaglia il doppio del raggio.*

La **circonferenza** *uguaglia il diametro moltiplicato pel rapporto.*

*L'***area** *del circolo uguaglia la circonferenza moltiplicata per la metà del raggio.*

*L'***area** *del circolo uguaglia pure il quadrato del raggio moltiplicato pel rapporto.*

Problemi sulle Misure di superficie.

336. Qual è la superficie d'un terreno di forma quadrata, che ha 20 m. di lato?

337. Dicasi la superficie d'un giardino formante un rettangolo di m. 40 di lunghezza e 30 di larghezza.

338. Trovisi qual sia la superficie d'un prato formante un triangolo di m. 60,20 di base sopra un'altezza di m. 48,30.

339. Qual sarà la superficie di un cortile formante un trapezio di cui un lato ha m. 34, l'altro m. 56, e la cui altezza è m. 25?

340. Un giardino avente la forma di rombo, ha m. 44,70 di base sopra m. 38,40 di altezza; qual ne è la superficie?

341. Cerchisi il lato d'uno stagno quadrato che ha m. 1020 di circuito.

342. Qual è il diametro d'un circolo di m. 44 di circonferenza?

343. Dicasi il raggio d'un circolo di m. 350 di circonferenza.

344. Trovisi la circonferenza d'un circolo di m. 0,5 di raggio.

345. Un circolo ha m. 20 di diametro; qual è la sua circonferenza?

346. Il diametro d'un circolo essendo di 24 m. dicasene la superficie.

347. Qual è il circuito d'un quadrato avente 3600 m.q. di superficie?

348. La larghezza d'un rettangolo di 4800 m.q. di superficie, non è che i $^3/_4$ della lunghezza; qual ne sarà il circuito?

349. Quali sono le dimensioni d'un trapezio di 405 m.q. di superficie, sapendo che l'altezza è il $^1/_5$ della semisomma delle basi, le quali differiscono tra loro di 10 metri?

350. Un circolo ha 100 m.q. di superficie; se ne trovi il raggio, il diametro e la circonferenza.

351. Prospero ha tre campi di ugual superficie; uno quadrato, l'altro triangolare, ed il terzo circolare, aventi insieme 4800 are di superficie; la base del triangolo essendo doppia dell'altezza, si dicano le dimensioni di questi terreni.

352. Il diametro delle due ruote maggiori di una locomotiva è m. 1,75, quello delle quattro minori m. 1,10; chiedesi il numero dei giri che ognuna farà sopra una strada di 122 chilometri.

353. Trovisi il diametro d'un circolo la cui circonferenza uguaglia il perimetro d'un esagono avente m. 6,50 di lato.

354. La superficie d'un trapezio è m.q. 170; dicasene l'altezza e le basi, sapendo che queste sommano a 20 m., e che l'una è solo i $^2/_3$ dell'altra.

355. Un terreno formante un poligono irregolare fu scomposto in tre triangoli, le cui basi sono rispettivamente m. 15,25, m. 25,20, m. 18,45, e le altezze m. 12,15, m. 14,60 e m. 8,40. Qual ne è la superficie?

356. Si è scomposto un campo in quattro parti, cioè: un triangolo di 46 m. di base su 24 di altezza, e 3 trapezi le cui basi sono rispettivamente: m. 24 e 36; 74 e 50; 124 e 94; e le altezze m. 13; 84 e 146. Qual è la superficie del campo?

357. Ulisse ha un podere formante un trapezio, le cui basi sono di m. 465 e 806, e l'altezza m. 550; nel centro è una va-

sca di 45 m. di raggio. Domandasi 1° la superficie del podere, 2° quella della vasca, 3° quella del terreno produttivo,

358. Nel mezzo d'un prato di forma quadrata avente m. 45 di lato, vuolsi scavare un bacino di un'estensione uguale al $^1/_5$ della superficie; se ne trovi il raggio.

359. Qual è la base e l'altezza di un rettangolo di 120 m.q. di superficie, se il quoto della base per l'altezza uguaglia $3\ ^1/_3$?

360. Il pavimento d'un salone lungo 16 m. e largo 14, può intavolarsi a ll. 5 il m q., ed ammattonarsi a ll. 3,30 il m.q.; qual modo torna più economico e di quanto, posto che il 1° duri 12 anni ed il 2° solamente 6?

361. Debbo cingere di gelsi un campo quadrato, avente 9 Ea. di superficie; quanto spenderò, se gli alberi costano ll. 1,75 l'uno e si piantano 5 m. distanti l'uno dall'altro?

362. Vuolsi tapezzare con carta da ll. 2,40 il m.q. un camerone lungo m. 15, largo 10, alto 4,80, ed in cui sono due porte di m. 3 di altezza su 1 di larghezza e 6 finestre alte m. 2,60 e larghe 1,80; quanto si dovrà sborsare?

§ 4° — MISURE DI VOLUME.

497. — Si chiama **solido, volume** o **corpo** l'estensione considerata sotto le tre dimensioni, lunghezza, larghezza ed altezza (*ovvero* spessore o profondità).

Tal è lo spazio occupato da un dado, da una palla, da una casa, ecc.

Dicesi poi **solidità** d'un corpo il risultato della misurazione di esso.

498. — L'unità principale delle misure di solidità è il **metro cubo,** cioè un *cubo che ha un metro di lunghezza, uno di larghezza ed uno di spessore.*

499. — Il metro cubo nei calcoli usuali non ammette verun multiplo, ma soltanto i tre sottomultipli, cioè il *decimetro cubo* (cubo di un decim. di lato), il *centimetro cubo*, ed il *millimetro cubo.*

500. — In geometria si dimostra che il metro cubo vale 1000 *dm.c.*, il *dm.c* vale 1000 *cm.c.*, il *cm.c* vale 1000 *mm.c.* Risulta perciò che ciascuno di questi sottomultipli del metro cubo vuol essere espresso con tre cifre, di cui la prima a sinistra rappresenta le centinaia, la seconda le decine e la terza le unità del sottomultiplo che si considera. Così il numero *m.c.*, 12,750496 si legge: 12 *m.c*, 750 *dm.c.* e 496 *cm.c.*, ovvero 12 *m.c.* e 750496

cm.c. Il numero *dm.c* 8,640830 si legge: 8 *dm.c*, 640 *cm.c.* e 830 *mm.c.*, ovvero 8 *dm.c.* e 640830 *mm.c.*

501. — Per misurare le legna da fuoco si adopera lo **stero**, misura uguale al *metro cubo.*

502. — Lo *stero*, non ha che un multipto che è il *decastero*, misura di dieci steri, ed un solo sottomultiplo che è il *decistero*, misura che uguaglia la decima parte dello stero.

503. — Le misure effettive di volume sono: lo *stero* col suo doppio e colla sua metà, ed il *mezzo decastero.*

504. — ***Modo di valutare i volumi.*** Quanto fu detto per le superficie (496) vuolsi pur intendere dei volumi, la cui solidità si ottiene operando sopra i numeri esprimenti le loro dimensioni. Indicheremo pur qui il modo di ottenere la superficie e la solidità de' principali solidi.

Cubo. — *La* **superficie** *del cubo è uguale a sei volte l'area d'una delle due facce.*

La **solidità** *del cubo uguaglia lo spigolo moltiplicato due volte per se stesso.*

Prisma. — *La* **superficie laterale** *del prisma retto regolare è uguale al perimetro* (contorno) *della base moltiplicato per l'altezza.*

La **superficie totale** *si ottiene aggiungendo alla superficie laterale quella delle due basi.*

La **solidità** *del prisma è uguale all'area della base moltiplicata per l'altezza.*

Cilindro. — *La* **superficie laterale** *del cilindro retto è uguale alla circonferenza d'uno dei circoli di base moltiplicata per l'altezza.*

La **solidità** *del cilindro è uguale all'area d'una base moltiplicata per l'altezza.*

Piramide. — *La* **superficie laterale** *della piramide regolare è uguale al perimetro della base, moltiplicata per la metà dell'altezza dei triangoli laterali.*

La **solidità** *della piramide è uguale all'area della base moltiplicata per terzo all'altezza della piramide.*

Cono. — *La* **superficie laterale** *del cono retto è uguale alla lunghezza della circonferenza di base moltiplicata per la metà della lunghezza laterale.*

La **solidità** *del cono è uguale all'area del circolo di base moltiplicata per* $^1/_3$ *dell'altezza.*

Tronco di piramide. — *La* **superficie laterale** *del tronco di piramide a basi parallele, uguaglia il prodotto della semisomma dei due perimetri delle basi per l'apotema del tronco.*

La **superficie totale** *si ottiene aggiungendo alla superficie laterale quella delle basi.*

La **solidità** *del tronco di piramide uguaglia il prodotto*

del $^1/_3$ dell'altezza per la somma delle due basi e della radice quadrata del loro prodotto.

Tronco di cono. — *La* **superficie laterale** *del tronco di cono a basi parallele, uguaglia il prodotto della semisomma delle due circonferenze pel lato del tronco.*

La **superficie totale** *si ottiene aggiungendo alla superficie laterale quella delle basi.*

La **solidità** *del tronco di cono uguaglia il prodotto del $^1/_3$ dell'altezza per la somma delle due basi e della radice quadrata del loro prodotto.*

Sfera. — *La* **superficie** *della sfera è uguale alla circonferenza moltiplicata pel diametro.*

La **superficie** *della sfera uguaglia pure il quadrato del raggio moltiplicato pel quadruplo del rapporto, cioè per* 12,5664.

La **solidità** *della sfera è uguale alla superficie moltiplicata pel terzo del raggio.*

La **solidità** *della sfera è pure uguale al cubo del raggio moltiplicato pei $^4/_3$ del rapporto, cioè per* 4,1888.

Botte. — *Si valuta approssimativamente la* **capacità** *d'una botte considerandola come un cilindro avente per altezza la lunghezza interna della botte, e per diametro quello dell'*entasi (*pancia*) *diminuito del $^1/_3$ della differenza che passa tra esso ed il diametro del fondo.*

Problemi sulle Misure di volume.

363. Qual è la solidità d'un cubo di cui ciascuna faccia ha 16 m.q. di superficie?

364. Trovisi il volume d'un cilindro che ha 2 m. di raggio e 12 d'altezza.

365. Un cono ha 15 m. d'altezza perpendicolare e 25 m.q. di superficie nel circolo di base; qual n'è la solidità?

366. Dicasi la solidità d'un cono tronco, di cui il piccolo diametro è m. 12, il grande 20, e l'altezza 10.

367. Di quanti metri cubi è la solidità d'una piramide che ha m. 14 di altezza perpendicolare, e 24 m.q. di base?

368. Una piramide ha 12 m. d'altezza perpendicolare, e la sua base è un triangolo avente 6 m. di base e 4 di altezza; qual n'è il volume?

369. Cerchisi la solidità d'un globo che ha 2 m. di diametro.

370. Si calcoli la solidità d'una sfera di 36 m. di circonferenza.

371. Qual è la superficie totale d'un masso di marmo di 9 m. di lunghezza, 8 d'altezza e 7 di larghezza?

372. Qual è la superficie di una sfera avente 80 m.c. di volume?

373. Dicasi il raggio della base di un cono che ha 35 m.c. di solidità e 6 m. di altezza.

374. La superficie totale d'un cilindro di 15 dm. di altezza è 15 m.q., quella delle due basi insieme solo i $^2/_3$ della superficie laterale; qual n'è la solidità?

375. Qual è l'altezza laterale di una piramide pentagonale, che ha 7 m. di perimetro e 30 m.q. di superficie laterale?

376. Quante foglie d'oro di 4 dm.q. furono adoperate per dorare una sfera di 14 dm. di raggio.

377. Quanti m.c. d'acqua contiene una vasca di forma circolare, che ha 4 m. di altezza e 44 di circonferenza?

378. La base superiore di una secchia è di 60 dm.q. di superficie, e l'inferiore 40; qual n'è l'altezza, se la capacità è 120 dm.c.?

379. I due diametri d'una botte alta 3 m. sono l'uno 2 m., e l'altro m. 1,40; qual n'è la capacita?

380. Qual è la superficie totale d'un cono, che ha 24 dm. di raggio e 40 di altezza laterale?

381. Chiedesi la superficie interna ed esterna d'una sfera cava, avente m. 0,035 di spessore, e m. 1,05 di diametro esterno.

382. I raggi delle due estremità d'un tronco d'albero lungo m. 8,75 sono rispettivamente m. 0,30 e m. 0,12; qual n'è il volume?

383. Un pezzo di marmo di Carrara lungo m. 0,78, largo m. 0,45 e alto m. 0,57 fu venduto a ll. 294 il m.c.; quanto si ricavò?

384. Si sono pagate ll. 2524 nella costruzione d'un muro di cinta alto m. 2,60 e largo 0,60; qual era la sua lunghezza, sapendo che il m.c. si pagò ll. 15,25?

385. Quali sono le dimensioni di un bacino capace di m.c. 1093,75, posto che la lunghezza sia i $^7/_5$ della larghezza ed i $^5/_3$ della profondità?

386. Una macina da molino, che ha 85 cm. di spessore ed 1 metro di raggio si paga ll. 0,60 il decim. cubo; quanto costa?

387. Doroteo compra tre pani di zuccaro aventi ciascuno 25 c.m. di raggio alla base e 6 dm. di altezza; quanto gli toccherà spendere, ove il dm.c. dello zuccaro pesi Cg. 1,20 e lo paghi ll. 0,90 il chilogramma?

388. L'acqua percorre in 5 minuti un tubo di 2 dm. di diametro e 116 m. di lunghezza, occupando $^1/_2$ della sua capacità, se questo tubo dà capo in una cisterna avente 6 m. di raggio e 10 di profondità, dicasi in quanto tempo sarà piena.

§ 5° — MISURE DI CAPACITÀ.

505. — Si chiama **capacità** la quantità di materia di cui è *capace* un vaso.

506. — L'unità principale delle misure di capacità è il **litro,** *vaso cubo, la cui capacità uguaglia un decimetro cubo.*

La forma cubica non essendo molto comoda per gli usi del commercio, si suole dare al litro la forma cilindrica.

507. — I multipli del litro sono: il *decalitro*, l'*ettolitro* ed il *chilolitro*. — I sottomultipli sono: il *decilitro* ed il *centilitro*. Le espressioni *mirialitro*, *millilitro* non sono usate.

508. — ***Misure effettive.*** L'*ettolitro*, il *decalitro*, *il litro*, il *decilitro*, col loro doppio e colla loro metà, e il *centilitro* col suo doppio.

Problemi sulle Misure di capacità.

389. Un vaso capace di 25 litri essendo pieno d'acqua, vi s'immerse un corpo avente 7580 cm.c. di volume; dicasi quanta acqua sia rimasta nel vaso.

390. Quanti El. d'acqua contiene una peschiera che ha $^1/_4$ di Ea. di superficie, e m. 1,25 d'altezza?

391. In una vasca lunga m. 5,60, larga 3,40 e profonda 2,70, l'acqua giunge all'altezza di m. 2,10. Quanti El. d'acqua contiene e quanto ne riceve all'ora, se occorrono 56 ore a riempirla?

392. Posto che un uomo consumi 35 El. d'aria il dì, si trovi in quanto tempo sarebbe interamente viziato l'ambiente d'una sala lunga m. 8,25, larga 7 ed alta 3,45, in cui fossero chiuse 10 persone.

393. In una caldaia cilindrica piena d'acqua, avente m. 1,30 di diametro e 1,50 di profondità, s'immerge una sfera di m. 0,45 di diametro. Dicasi quant'acqua rimanga nella caldaia.

394. La lunghezza d'un serbatoio è doppia della larghezza, e questa doppia della profondità. Si cerchino queste dimensioni, sapendo che il serbatoio somministra 25 litri d'acqua al minuto durante 90 giorni senza interruzione.

395. Qual somma si ritrasse da Ea. 9,0275, se 1 Ea. produsse 3258 lit. di grano da ll. 6,95 l'El.?

396. Feci tre compre di vino da ll. 0,35 il litro, e spesi lire 665,15; dicasi di quanti litri fu la 3ª compra, sapendo che la 1ª è stata di 78 Dl., 763 cl.; e la 2ª di 2 El., 49 lit., 54 centilitri.

397. Qual sarà il mio guadagno nella vendita di lit. 225 di vino a ll. 1,60 il litro, sapendo che ogni El. mi costò ll. 38 oltre ll. 2,50 di commissione, ll. 2,75 per diritto di vendita, e ll. 4.75 di trasporto?

398. Una fonte, che dà 35 Dl. d'acqua all'ora, riempirebbe un bacino in 24 ore; in quanto tempo lo riempirà un'altra che ne gitta El. 2,8 all'ora?

399. Un recipiente capace di dm.c. 75,050 è pieno d'un certo liquore pagato ll. 250,05 l'El.; a quanto dovrassi rivendere il mezzo litro per guadagnare ll. 12,50 in tutto?

400. Comprai l'intera raccolta del vino d'un vignaiuolo a ll. 48,50 l'El.; nel rivenderla guadagnai ll. 375 (15ª parte del prezzo di vendita); quante Ea. di terreno possedeva il vignaiuolo sapendo che si raccolsero El. 18,40 per ettara?

401. Con ll. 1182,15 compraronsi tre otri d'olio di balena, in tutto El. 10,65; il maggiore avendone Dl. 23,5 più dei due altri insieme, e questi 25 litri l'uno più dell'altro, dicasi il prezzo di ciascuno.

402. Quanto costò lo scavamento d'un bacino capace di 18430 El., a ragione di ll. 3 il metro cubo?

403. Il prezzo d'una botte è di ll. 15, e piena di vino fu pagata 65 ll.: qual è il prezzo dell'El., sapendo che il diametro dell'entasi è d'un m., quello dell'estremità m. 0,85, e l'altezza m. 1,30.

404. Per empir d'acqua un serbatoio cubico di 7 m. di lato si adopera una secchia di 6 dm. d'altezza, e le cui basi hanno rispettivamente 15 cm. e 10 cm. di raggio. Quante secchie d'acqua si sono versate?

405. Tre cannelle versano insieme in un bacino largo 3 m. e lungo 2; la 1ª dà lit. 540 all'ora, la 2ª El. 7, e la 3ª 76 Dl., e lo riempiono in ore 7 $^1/_2$. Qual n'è la profondità?

§ 6° — MISURE DI PESO.

509. — L'unità principale delle misure di peso è il **gramma**, equivalente al *peso assoluto d'un centimetro cubo d'acqua distillata, presa alla temperatura della massima sua densità e pesata nel vuoto.*

510. — I multipli del gramma sono: il *decagramma*, l'*ettogramma*, il *chilogramma* ed il *miriagramma*. — I sottomultipli sono: il *decigramma*, il *centigramma* ed il *milligramma*.

511. — Per la sua comodità nel pesare, il *chilogramma* di-

venne l'unità usuale delle misure di peso. L'espressione *miriagramma* venne ordinariamente surrogata da quella di *dieci chilogrammi*.

Il **quintale metrico** pesa 100 chilogrammi.

La **tonnellata metrica** o **di mare** corrisponde ad un metro cubo d'acqua, e pesa 1000 chilogrammi.

512. — ***Misure effettive.*** Il *miriagramma*, il *chilogramma*, l'*ettogramma*, il *decagramma*, il *gramma*, il *decigramma*, il *centigramma*, col loro doppio e colla loro metà, e il *milligramma* col suo doppio. È pure misura effettiva il *mezzo quintale metrico*, ossia 50 *chilogrammi*.

513. — ***Pesi specifici*** o ***densità.*** Un corpo dicesi più *denso* d'un altro, quando a parità di volume esso contiene più materia, ossia pesa di più. Così l'oro è più denso dell'argento perchè ad egual volume è più pesante.

Si possono perciò valutare le densità dei corpi, paragonando i loro pesi a volumi uguali. Per es., 19500 gr. essendo il peso di un decimetro cubo d'oro, e 1000 gr. quello d'un decimetro cubo d'acqua, se questa vien scelta per unità, la densita dell'oro sarà (478) 19500 : 1000 = 19,50. Quindi si conchiude che:

La **densità** o il **peso specifico** d'un corpo è il quoto che si ottiene dividendo il suo peso per quello di un altro d'egual volume, scelto per unità (*).

La tavola seguente venne calcolata prendendo per unità il peso del dm.c. d'*acqua* nei solidi e liquidi, e quello del dm.c. d'*aria* nei gas. Perciò il numero posto rimpetto ad un corpo solido o liquido, esprime in chilogrammi il peso d'un dm.c. di tal corpo; mentre per i gas, affinchè il numero esprima in chilogrammi il peso d'un dm.c., bisogna moltiplicarlo per la densità dell'aria rispetto all'acqua, cioè per $^1/_{770}$.

(*) Si otterrebbe dunque la densità dei corpi col semplice mezzo d'una bilancia, se il loro volume si potesse sempre valutare con precisione: ma essendo ciò il più delle volte impossibile, si ricorre al seguente principio d'idrostatica:

Un corpo immerso nell'acqua perde del suo peso una parte uguale a quello del volume dell'acqua spostata.

In conseguenza di tale principio, volendosi p. es. la densità d'un pezzo d'oro, lo si peserà da prima nell'aria e quindi nell'acqua; la differenza dei risultati sarà il peso d'un ugual volume d'acqua: si avrà perciò la richiesta densità dividendo il primo risultato per questa differenza.

Gli è pure in forza della suaccennata legge che un corpo va in fondo all'acqua se è più denso della medesima, viene a galla se è meno denso, e rimane ondeggiante sott'acqua se ha la stessa densità. Lo stesso avviene nell'atmosfera rispetto ai corpi di densità maggiore, minore od uguale a quella dell'aria.

Tavola delle Densità di alcuni corpi.

Solidi.	
Plàtino purificato	19, 500
Oro fino	19, 2581
Mercurio (a zero)	13, 598
Piombo fuso . .	11, 352
Argento » . .	10, 4743
Rame » . .	8, 788
Arsenico » . .	8, 308
Ferro » . .	7, 600
Stagno » . .	7, 291
Zinco » . .	6, 861
Antimonio» . .	6, 712
Diamante . . .	3, 531
Marmo di Paros .	2, 838
» di Carrara	2, 717
Corallo	2, 680
Porcellana di China	2, 385
Zolfo nativo . .	2, 033
Avorio	1, 917
Alabastro . . .	1, 874
Allume	1, 720
Quercia	1, 170
Cera	0, 967
Cevo e butirro .	0, 942
Bosso	0, 912
Olmo	0, 800
Prunaio	0, 785
Pomo	0, 733
Ciliegio	0, 715
Melarancio . . .	0, 705
Sambuco . . .	0, 695
Salice	0, 685
Noce	0, 671
Pero	0, 661
Abete	0, 657
Tiglio	0, 604
Avellano (nocciuolo)	0, 600
Cedro	0, 561
Pioppo	0, 383
Sughero	0, 240
Liquidi.	
Acido solforico . .	1, 841
Acido nitrico (acqua forte)	1, 2175
Acqua di mare . .	1, 0263
Latte	1, 030
ACQUA DISTILLATA	1, —
Vino comune d'Italia	0, 997
Olio di lino . . .	0, 940
» di noce . .	0, 923
» d'olivo . . .	0, 915
Ghiaccio	0, 930
Ètere muriatico .	0, 874
Essenza di terebentina	0, 870
Alcool assoluto . .	0, 792
Alcool di commercio	0, 840
Ètere solforico . .	0, 7155
Gas.	
Aria ($^1/_{770}$ dell'acqua)	1, —
Cloro	2, 4700
Acido carbonico .	1, 5290
Ossigeno	1, 1056
Idrogeno bicarbonato (gas-luce) . . .	0, 9780
Azoto	0, 9714
Ammoniaca . . .	0, 5894
Idrogeno	0, 0693

514. — Prendendo per unità l'acqua distillata, poichè un decimetro cubo pesa un chilogramma, al suo peso si potrà sostituire il suo volume, ossia il volume del corpo di cui si cerca la densità, espresso in decimetri cubi. Dunque ove si prenda per unità l'acqua distillata, la definizione precedente si converte in quest'altra:

La **densità** o il **peso specifico** d'un corpo è il quoto che si ottiene dividendo il suo peso pel suo volume.

Per conseguenza se di queste tre cose, peso, volume, e densità, due sono cognite, si potrà dedurne la terza, poichè:

1° *La densità d'un corpo uguaglia il peso diviso per il volume.*

2° *Il peso d'un corpo uguaglia il volume moltiplicato per la densità.*

3° *Il volume d'un corpo uguaglia il peso diviso per la densità.*

Problemi sulle Misure di peso (*).

406. Due ceppi di legno di campeggio pesano insieme 10 quintali metrici e 25 Dg.; il peso del 1° essendo 6008 Eg., si esprima in chilogrammi quello del secondo.

407. Quanti chilogrammi di caffè da ll. 0,04 il Dg. si possono dare per 10 Cg. di zuccaro da ll. 0,20 l'Eg.?

408. Tre denti d'elefanti pesano insieme 758 Eg.; si domanda in chilogrammi il peso del 3°, sapendo che il 1° è di 428 Dg. ed il 2° 1275 grammi di più.

409. Un fabbro compra ferro a ll. 3 il Mg., e ne fa chiodi che vende 0,04 la dozzina; quanto guadagnerà su 15 Cg. di ferro, se un chiodo pesa mg. 115?

410. Avendo comprato 216 Cg. di grana di scarlatto a lire 4,50 per 5 Eg., e 745 Eg. di cocciniglia a ll. 12 il Cg., do in pagamento un biglietto e 120 Cg. d'indaco da ll. 1,70 l'Eg. Dicasi il montante del biglietto.

411. Si domanda il peso d'una palla d'anacardo di 131480 cm.c., sapendo che un dm.c. di questo legno pesa Dg. 79.

412. Un dm.c. di legno d'ebano pesa Eg. 12,75, e vendesi ll. 0,32 il Cg.; quanto costeranno 5 ceppi di 628320 cm.c. ciascuno?

413. A Chantonnay nella Vandea cadde un aereolito, che pesava 34 Cg. ed aveva 3,67 di densità. Se ne cerchi il volume.

414. Un vaso pesa Cg. 8,752, e può contenere Cg. 43,83 di acqua; quanto peserebbe ove si riempisse di latte?

415. Quanto spesi nella compra di 345 lit. d'olio a ll. 1,50 il Cg., posto che il cm.c. pesi mg. 924?

416. Qual è il peso d'una sfera di platino purificato avente m. 0,45 di circonferenza?

417. La densità della ghisa essendo 7,207, si domanda il peso d'un cono di tal metallo avente m. 0,56 di diametro alla base, ed altrettanto d'altezza.

418. Un bacino contiene 728 m.c. e 94 dm.c. d'acqua marina; quanto pesa quest'acqua, e quanto peserebbe se fosse acqua distillata?

419. Qual è il peso del mercurio contenuto in un vaso avente dm.c. 3,25 di capacità?

(*) In questi problemi non si espressero quei dati che possono venir desunti dalla precedente tavola. Dovrassi pertanto ricorrere ad essa quando sia d'uopo.

420. Se l'olio d'ulivo pagasi ll. 244 il quintale m., quanto costeranno 218 litri?

421. Una botte pesa Mg. 21,755 se è piena d'alcool assoluto, e Cg. 26,74 se vuota; quanto peserebbe se fosse riempita di vino?

422. Vendendo zuccaro a ll. 1,95 il Cg. guadagnai ll. 2756,25; se l'avessi venduto a ll. 1,60 non avrei nè guadagnato nè perduto. Quanto ricevetti da tal vendita?

423. Comperai a ll. 4,50 il Cg. tal numero di Dg. d'acido tartarico, che togliendo 29 dalla dodicesima parte di esso, restano 6 Cg.; quanto mi toccò pagare?

424. Compero st. 809,5 di legna con facoltà di pagarla lire 25 lo stero, ovvero ll. 0,41 il Mg.; qual modo mi torna più vantaggioso e di quanto, se il m.c. di legna pesa Cg. 660?

425. Trovisi il peso d'una trave avente m. 10,50 di lunghezza e cm. 42 di squadratura, se galleggiando sull'acqua vi s'immerge 25 centimetri.

426. Un vaso pieno d'olio di lino pesa Cg. 18,10, un altro di egual peso e capacità, ma pieno d'olio d'ulivo, pesa Cg. 17,725. Quanto pesa un vaso vuoto?

427. Si chiede qual debba essere il volume d'un pallone aereostatico, affinchè pieno d'idrogeno, possa sorreggere nell'aria una sfera di piombo avente m. 0,40 di raggio.

428. Se la sfera del problema precedente fosse immersa nell'acqua, qual volume dovrebbe avere il pallone per sorreggerla, stando esso fuori dell'acqua?

429. Si risolva ancora lo stesso problema, nel caso in cui la sfera ed il pallone stessero entrambi nel mare.

§ 7° — MISURE DI VALORE O MONETE.

515. — L'oro e l'argento, chiamati **metalli nobili**, sono la materia principale onde constano le monete. Per dare a queste maggior consistenza, si suole unire col nobile alquanto metallo inferiore, ordinariamente rame.

Il metallo inferiore che si fonde coll'oro e l'argento si chiama **lega;** il nobile quando è puro si dice **fino,** ed unito alla lega chiamasi **greggio.**

516. — L'unità monetaria è la **lira italiana,** moneta in argento pesante 5 grammi, di cui $^9/_{10}$ di fino e $^1/_{10}$ di lega.

I multipli e sottomultipli della lira non assumono le denominazioni *deca, etto,..... deci, centi,.....*: ma si dice *dieci* lire, *cento* lire,..... *decimo, centesimo* e *millesimo.*

Oltre il peso delle monete, la legge determina il *titolo*, la *tolleranza* ed il *taglio.*

517. — Il **titolo** d'una moneta è il grado di purezza del metallo onde essa è composta.

Per le monete dello Stato il titolo legale è $^{9}/_{10}$, ossia $^{900}/_{1000}$: vale a dire, che in ogni moneta d'oro e d'argento i 900 *millesimi* del suo peso sono di fino, e 100 *millesimi* di lega (*).

518. — La **tolleranza** è un leggero errore in più o in meno, che la legge *tollera* sul peso e sul titolo delle monete.

519. — Dicesi **taglio** o **piede** il numero dei pezzi d'una data moneta, che si ottiene coniando un chilogramma di metallo greggio.

Conoscendo il peso d'una moneta se ne può determinare il taglio, e reciprocamente. Così il peso dello scudo essendo 25 gr., il suo taglio sarà $1000 : 25 = 40$. Similmente il taglio della pezza in oro da ll. 20 essendo fissato a 155, il peso legale di questa pezza sarà $1000 : 155 =$ gr. 6,4516.

520. — Le monete hanno due valori, cioè il valore *intrinseco* ed il valore *legale* o *nominale*, detto anche valore *di tariffa*.

Il **valore legale** d'una moneta è quello assegnato dalla legge, e che le viene attribuito nella circolazione.

Oltre il valore dei $^{9}/_{10}$ di fino contenuti in ogni moneta, il valore legale comprende ancora il *diritto di conio*, il quale è fissato per ogni chilogramma così (**):

Oro fino..... *ll.* 8,44	*Argento fino*..... *ll.* 2,72.
Oro greggio $8{,}44 \times {}^{9}/_{10} =$ *ll.* 7,60	*Arg. greg.* $2{,}72 \times {}^{9}/_{10} =$ *ll.* 2,45.

Il **valore intrinseco** d'una moneta è quello del metallo fino che essa contiene, non computando la lega nè il diritto di conio.

Questo valore determina il così detto *valore al pari* delle monete estere (V. *Terza Parte*).

521. — ***Valore d'un chilogramma di metallo nobile.*** Poichè si coniano 155 pezze da ll. 20 con un chilog. d'oro, e 40 pezze da ll. 5 con un chilog. d'argento, si ha che:

4 *Cg. d'oro greggio* ($^{900}/_{1000}$) *monetato vale* $155 \times 20 =$ *ll.* 3100
1 *Cg. d'argento greggio* ($^{900}/_{1000}$) *monetato vale* $40 \times 5 =$ *ll.* 200

Da questi due valori sottraendo il rispettivo diritto di conio sopra un chilog. di metallo greggio, risulta:

1 *Cg. d'oro greggio non monetato vale* $3100 - 7{,}60 =$ *ll.* 3092,40.
1 *Cg. d'argento greg. non monetato vale* $200 - 2{,}45 =$ *ll.* 197,55.

(*) Con regio Decreto in data 24 agosto 1862, venne statuito che tutte le monete in argento, eccettuato lo scudo, avessero in avvenire il titolo $^{835}/_{1000}$.

(**) Con regio Decreto del 12 dicembre 1861 il diritto di conio venne ridotto a ll. 7,444 pei Cg. d'oro fino, e ll. 1,722 pel Cg. d'argento fino. Noi però, fino ad una nuova edizione del *Soluzionario*, non possiamo introdurre questa modificazione nei problemi.

Poichè i $^{9}/_{10}$ del chilogramma fino monetato valgono ll. 3100 per l'oro, e ll. 200 per l'argento, si ha pure che:

1 *Cg. d'oro fino monetato vale* 3100 : $^{9}/_{10}$ = *ll.* 3444,44.
1 *Cg. d'argento fino monetato vale* 200 : $^{9}/_{10}$ = *ll.* 222,22.

Sottraendo da questi due valori il rispettivo diritto di conio sopra un chilog. fino si ha:

1 *Cg. d'oro fino non monetato vale* 3444,44—8,44=*ll.* 3436.
1 *Cg. d'argento fino non monetato vale* 222,22—2,72=*ll.*219,50.

Osservazione. — L'oro monetato, sia greggio sia fino, vale 15 volte $^{1}/_{2}$ più dell'argento, giacchè si ha

3100 : 200 = 15 $^{1}/_{2}$, e 3444,44 : 222,22 = 15 $^{1}/_{2}$.

522. — ***Monete effettive.*** La serie delle monete decimali del Regno si compone di 14 pezze: cinque in *oro*, cioè da 100 lire, da 50, da 20, da 10 e da 5; cinque in *argento*, cioè da 5 lire, da 2, da 1, da 50 cent. e da 20; quattro in *bronzo* (*), cioè da 10 cent., da 5, da 2 e da 1 (**).

Quadro delle Monete decimali del Regno.

MATERIA	NOME E VALORE	DIAMETRO	TITOLO	TOLLERANZA di titolo per Cg.	PESO LEGALE	TOLLERANZA sul peso	PESO che può avere in più o in meno	TAGLIO al chilogramma
		millim.	*milles.*	*milles.*	*gr.*	*milles.*	*milligr.*	
5 in ORO	Pezz. da *ll.* 100	35	900	2	32,2580	1	32,26	31
	— „ 50	28	„	„	16,1290	„	16,13	62
	— „ 20	21	„	„	6,4516	2	12,90	155
	— „ 10	19	„	„	3,2258	„	6,45	310
	— „ 5	17	„	„	1,6129	3	4,84	620
5 in ARGENTO	Pezz. da *ll.* 5	37	900	3	25 „	„	75	40
	— „ 2	27	835	„	10 „	5	50	100
	— „ 1	23	„	„	5 „	„	25	200
	— „ 0,50	18	„	„	2, 50	7	17,50	400
	— „ 0,20	16	„	„	1 „	10	10	1000
4 in BRONZO	Pezz. da *cent.* 10	30			10 „	„	100	100
	— „ 5	25			5 „	„	50	200
	— „ 2	20			2 „	5	10	500
	— „ 1	15			1 „	„	5	1000

(*) Secondo la legge 24 agosto 1862 le monete in bronzo debbono contenere 960/1000 di rame e 40/1000 di stagno, colla tolleranza di 5/1000 in più od in meno per ciascuno dei due metalli.

(**) Oltre i valori metallici vi è la *carta moneta*, ossia i *biglietti di Banca* da ll. 1000, da ll. 500, da ll. 250, da ll. 100, da ll. 50 e da ll. 20.

Vennero pure emessi nel 1866 altri biglietti, i quali crediamo siano per cessare quando cesserà il corso forzato.

Problemi sulle Monete.

430. Olimpio vendè, a ll. 25 l'una, 3 dozzine di sedie impiallacciate d'anacardo; dicasi il peso in argento della somma ricevuta.

431. Qual è il peso d'un oggetto, che posto sulla bilancia trovasi in equilibrio con tre pezze da 5 ll., una da 2 ll., un'altra da 50 centes. e due da 20 centesimi?

432. In un sacchetto pesante Cg. 5,323 sono 125 pezze da 5 ll., 140 da 2 ll., ed il resto da lire una; qual è il numero di queste ultime?

433. Una verga d'oro al titolo $^{950}/_{1000}$ pesa 3 Cg.; qual è il peso della lega?

434. Quanti piano-forti da ll. 500 l'uno potrò io comprare con una somma in argento contenente 9 Cg. di fino?

435. Quanto rame contiene una somma in oro, che pesa quanto quella in argento pagata per 44375 gr. di madreperle da ll. 0,64 l'ettogramma?

436. Con due verghe d'argento puro pesante ciascuna Cg. 4,95, qual somma potrei coniare?

437. Una verga d'oro puro pesa gr. 1974,1896; trovisi il peso del rame necessario a monetarla, e quante pezze da ll. 20 si potranno coniare.

438. Una borsa, il cui peso netto è di gr. 293,50, contiene il massimo numero possibile di pezze da 5 ll., poi da 2 ll., quindi da 1 lira, da 50 centes. e da 20 centesimi. Quante sono le pezze d'ogni specie?

439. Quante pezze da 20 ll. si possono coniare con una verga d'oro fino, che immersa in un vaso d'acqua ne sposta litri 1,268?

440. Quanta lega si deve fondere con Cg. 9,750 d'argento fino per ottenere argento da vasellame del titolo $^{800}/_{1000}$?

441. Si domanda il valore intrinseco di gr. 8,40 d'oro al titolo $^{905}/_{1000}$.

442. Una statua d'argento $^{800}/_{1000}$ pesa Cg. 70,500; qual n'è il valore totale, se per lavorarla si spesero ll. 7500?

443. Alla zecca fu venduto un pezzo d'oro pesante Cg. 2,845 e venne riconosciuto essere del titolo $^{950}/_{1000}$; qual somma si ricavò?

444. Trovisi il titolo del metallo che si otterrebbe col fondere insieme le seguenti quantità d'argento: Cg. 1,735 a $^{800}/_{1000}$; Cg. 2,320 a $^{900}/_{1000}$; Cg. 1,600 a $^{950}/_{1000}$.

445. Fra i ruderi d'un vecchio castello si trovarono pezze da 40 soldi (*sols* di Luigi XV) del titolo $^{883}/_{1000}$. Quanto argento fa d'uopo aggiungere ad un Cg. di tali pezze per ridurle al titolo legale $^{900}/_{1000}$?

446. Essendosi decretato (nel 1862) che la lira it. avesse per l'avvenire il titolo $^{835}/_{1000}$, si vuol sapere qual somma si otterrebbe riducendo al nuovo titolo ll. 1000000.

447. Nel 1842 si trovò nei monti Urali una pepite (masso d'oro) pesante Cg. 36,02: cerchisi il titolo di questo masso, sapendo che venne stimato ll. 111662 (*).

Problemi

sulle Relazioni tra le Misure metriche.

448. Dicasi il volume corrispondente ad un El. d'acqua.

449. Quanti litri d'acqua sono in un recipiente, il cui volume interno uguaglia la decima parte d'un metro cubo?

450. Determinare il volume e la capacità corrispondente ad un Eg. d'acqua pura.

451. Trovare il peso e la capacità che corrispondono ai $^5/_7$ d'un m.c. d'acqua.

452. Qual è il volume d'un oggetto, il quale immerso in un vaso pieno d'acqua, ne fece uscire 3 El. e 7 litri?

453. Dire il volume d'un solido, che tolto da un cilindro di 3 dm. di diametro fece abbassare di dm. 2,50 l'acqua ond'era pieno il vaso.

454. Qual è la capacità d'un serbatoio avente 19 m.c., 46 dm.c., 7 cm.c. di volume?

455. Quante pezze d'argento da ll. 5 richieggonsi per fare un chilogramma?

456. Qual somma d'argento occorrerà per controbilanciare 1 El. 7 litri d'acqua pura?

457. Trovare la capacità d'una caldaia, che piena d'acqua pesa 36 Cg. 27 gr. e vuota pesa Cg. 12.

458. Quanti steri sono in un mucchio di legna avente 87519 dm.c. di volume?

459. Trovare il valore intrinseco d'un cucchiaio d'argento pesante 53 gr. al titolo $^{950}/_{1000}$

460. Qual è il peso d'un oggetto che fa equilibrio a 12 pezze da 5 ll., 7 da 2 ll., 9 da 1 lira, 4 da 50 cent. e 8 da 20 cent.?

461. Dire il valore dell'argento monetato, che pesa quanto lit. 3,84 d'acqua pura.

462. Quante pezze d'oro da ll. 50 sono in un rotolo pesante Cg. 7 e gr. 64,502?

463. Una catena d'oro al titolo $^{840}/_{1000}$ pesa gr. 207; qual n'è il valore intrinseco?

464. Esprimere in Ea. la superficie d'una provincia che ha Mm.q. 63 e m.q. 63.

465. Determinare il valore d'un campo di a. 43,69, venduto a ll. 2,08 il metro quadrato.

466. Qual è il valore intrinseco di una pezza straniera in oro, del peso di gr. 16,47 ed al titolo $^7/_8$.

(*) Il modello di questa pepite conservasi nel Museo mineralogico di Torino.

467. Cerchisi il valore d'un Cg. di monete in bronzo.

468. Il carico d'un uomo essendo circa di 63 Cg. dicasi qual somma possa egli portare in oro, quale in argento e quale in bronzo.

469. Compro un podere di Ea. 1 e a. 35 $^1/_4$, e lo pago con un sacchetto di pezze da ll. 20 pesanti in tutto Cg. 1 e gr. 451,61; qual è il prezzo del metro quadrato?

470. Per una botte di vino, ricevuta in Torino, dovetti sborsare ll. 524,81 compresovi ll. 18,81 di porto a ll. 1,80 il mezzo quintale, e l'entrata a ll. 6 l'El. Trovisi quanto mi costasse l'El. sul luogo di compra, sapendo che il peso del litro era di Cg. 0,95.

471. Qual è lo spessore d'un pezzo di marmo lungo 3 dm. e largo dm. 2,50 se immergendolo in un vaso pieno d'acqua ne fa uscire 8 Eg. e 6 grammi?

472. La spesa per la costruzione di un ponte montò a ll. 1057640,50 e venne pagata con tre sacchetti di ugual peso, contenenti, il 1° monete in oro, il 2° in argento ed il 3° in bronzo. Dicasi quante lire contenesse ciascuno.

Problemi di Ricapitolazione sul sistema metrico.

473. Augusto aveva comprato panno per ll. 6462,72, ma avendone preso m. 72,04 di più, dovette pagare ll. 7057,05. Qual era il numero de' metri comprati?

474. Con ll. 28,60 si comprarono 275 dl. di seme di trifoglio; quanti Dg. potrò comprarne con ll. 63,34, sapendo che 1 El. pesa Cg. 80?

475. Qual è il diametro d'una bomba pesante Cg. 12, ed avente 7,788 di densità?

476. Un vaso di porcellana chinese pesa Cg. 48,275 quando è pieno d'acqua; la sua capacità essendo lit. 32,75, domandasi il volume della materia ond'è composto.

477. Si comprarono El. 15,75 d'olio di lino per ll. 2179,50; qual è stato il prezzo del chilogramma?

478. Un El. di semente di lino pesa Cg. 67,50 e con ll. 14,58 se ne comprano 54 litri; qual è il prezzo del litro e del chilogramma?

479. Per un otre d'olio d'ulivo pesante 98 Cg. e 247 gr. sborsai ll. 191,85, oltre ll. 26,15 pel trasporto e ll. 34,35 pel dazio. L'otre vuoto pesando 11 Cg. e 14 gr., chiedesi a quanto bisognerà rivender il litro per guadagnare in tutto ll. 22,35.

480. Qual è il peso d'una verga d'oro $^{900}/_{1000}$ del valore di ll. 975,50?

481. Chiedesi il valore d'una somma in argento pesante quanto lit. 38,12 d'acqua.

482. Un orefice vuol fondere insieme quattro verghe d'oro, i cui titoli rispettivi sono: $^{940}/_{1000}$, $^{860}/_{1000}$, $^{800}/_{1000}$, e $^{780}/_{1000}$, ed i

pesi Eg. 48, Cg. 11,246, Dg. 948, e gr. 15628. Si determini il peso del rame ed il titolo del metallo risultante.

483. Posto che 100 Cg. di barbabietole diano Cg. 6,2 di zuccaro, Cg. 2,50 di melassa e Cg. 20,40 di polpa, domandasi quanto di zuccaro e di melassa si estrarrà dal raccolto di 3 Ea., 9 a. e 8 ca., ove 1 Ea. produca Cg. 31400 di barbabietole.

484. Un prato di 5 Ea. e 47 a. produce per ogni Ea. 5245 Cg. di fieno da ll. 37,40 i 1000 Cg., e spendonsi ll. 39,25 l'Ea. a coltivarlo. Si domanda il valore del prato, sapendo ch'esso uguaglia 30 volte il prodotto netto.

485. Qual è il peso dell'aria contenuta in una stanza lunga m. 8,40, larga 4,23 ed alta 3,75?

486. Comprai 8 pezze uguali di panno da ll. 10,50 il m., oltre uno scampolo di m. 15,30 e spesi ll. 2235,45. Qual fu la lunghezza d'una pezza?

487. Un bracciante lavorando 10 ore il dì, impiegò 15 giorni e 8 ore per dissodare 7 Ea 90 a., e ricevette ll. 48,50. Si domanda: 1° quanto lavoro fece in un'ora; 2° quanto ricevette per decametro quadrato.

488. Con ll. 2840 voglio comprare, in ugual quantità, zuccaro greggio, e zuccaro raffinato, pagando il 1° ll. 73,50 il quintale metrico, ed il 2° ll. 165. Quanti chilogrammi riceverò d'ogni specie?

489. In una città assediata si vogliono far macinare da 4 molini 1088 El. di grano; il 1° può macinare 4 El. al giorno, il 2° 7, il 3° 9, ed il 4° 12. Domandasi quanto tempo impiegheranno in tutto, e quanti El. si dovranno dare a ciascuno.

490. Litri 12 di latte pesano Cg. 12,300; si cerchi se contenga acqua e quanta.

491. Esprimere in Cm. la lunghezza percorsa da una vettura, sapendo che la circonferenza delle ruote maggiori è m. 2,30, e quella delle minori m. 1,70 e che queste fecero 8400 giri più delle altre.

492. Un ricco signore, morendo, dispone delle sue proprietà fondiarie a pro di cinque nipoti nel modo seguente: il 1° ed il 2° avranno insieme Ea. 19 $^{3}/_{5}$, il 2° ed il 3° Ea. 17 $^{8}/_{15}$, il 3° ed il 4° Ea. 14 $^{2}/_{3}$, il 4° ed il 5° Ea 12 $^{5}/_{6}$, e finalmente il 5° ed il 1° Ea. 16 $^{9}/_{10}$. Quante are avrà ciascuno?

493. Tre operai fecero: il 1° col 2° Dm. 9 $^{18}/_{25}$ di lavoro in 18 giorni; il 1° col 3° m. 103 $^{1}/_{2}$ in quindici giorni; il 2° col 3° m. 149 $^{2}/_{3}$ e dm. 3 $^{1}/_{3}$ in 20 giorni. Quanti metri fece ciascuno il dì?

CAPO II.

MISURE ANTICHE

§ 1° — MISURE DEL PIEMONTE.

523. — Per Piemonte intendiamo le antiche provincie di Torino, Susa, Pinerolo, Ivrea, Biella, Saluzzo, Cuneo, Mondovì, Alba, Asti e Vercelli, nelle quali solo esisteva uniformità di pesi e misure, stabilita da Carlo Emanuele I con editto 5 giugno 1612.

Il *piede liprando* formava allora la base di tutte le misure, le quali furono in uso fino al 1818.

A quest'epoca la Camera dei Conti, giusta il parere dell'Accademia delle Scienze di Torino, determinò di allungare il piede liprando di 124 *centomillesimi* colla mira d'aver per base delle misure la lunghezza dell'arco d'un *minuto terzo* del meridiano terrestre. Il piede liprando così modificato venne chiamato *piede piemontese*, col quale si formarono tutte le misure che furono in uso nelle suindicate provincie sino all'introduzione del sistema metrico negli Stati Sardi (anno 1850),

524. — ***Misure lineari.*** L'unità di queste misure era il **piede piemontese.** Il suo multiplo il *trabucco*, ed i suoi sottomultipli l'*oncia*, il *punto* e l'*àtomo*.

Relazioni.

Il trabucco = 6 piedi	Il punto = 12 àtomi
Il piede = 12 once	Il raso = 14 once
L'oncia = 12 punti	La tesa = 40 once.

Il miglio di 45 al grado = 800 trabucchi = 4800 piedi.

525. — ***Misure di superficie.*** L'unità di queste misure era il **trabucco quadrato**, il quale si suddivideva come il trabucco lineare.

Relazioni.

Il *trab. quad.* = 6 piedi di tr. q.	Il *pied. quad.* = 12 once di p. q.
Il pied. di tr. q. = 12 once di tr. q.	L'onc. del p. q. = 12 pun. di p. q.
L'onc. di tr. q. = 12 pun. di tr. q.	Il pun. del p. q. = 12 àtomi di p. q.
Il pun. di tr. q. = 12 àtomi di tr. q.	L'*onc. qu.* = 12 pun. d'onc. quad.

526. — L'unità delle misure agrarie era la **giornata,** cioè un quadrato di 20 trabucchi di lato. Essa si suddivideva in 100 *tavole* (quadrato di due trabucchi di lato); la tavola si suddivideva

in 12 *piedi di tavola;* il piede di tavola in 12 *once di tavola* e l'oncia di tavola in 12 *punti di tavola* (*).

527. — ***Misure di volume.*** L'unità era il **trabucco cubo,** il quale si suddivideva come il trabucco lineare.

Relazioni.

Il *trab. cubo* = 6 piedi di tr. cubo.	Il *pied. cub.* = 12 once di pied. c.
Il pied. di tr. cu. = 12 once di t. c.	L'onc. di pied. c. = 12 pun. di p. c.
L'on. di tr. cubo = 12 pun. di t. c.	Il pun. di p. cu. = 12 àt. di p. cub.
Il pun. di tr. cub. = 12 àt. di tr. cu.	L'*onc. cub.* = 12 pun. di onc. cub.

528. — Per misurare i muri si faceva uso del **trabucco camerale,** che è un parallelepipedo rettangolo avente per base un trabucco quadrato e per altezza 10 once. Esso veniva suddiviso, come il trabucco cubo, in piedi, once, ecc., di trabucco camerale (**).

529. — Per misurare il legname da costruzione usavasi l'**oncia da legname**, che è un parallelepipedo rettangolo avente un'oncia quad. di base e un trabucco d'altezza.

530. — ***Misure di capacità.*** 1° PEI LIQUIDI. L'unità era la **brenta**. I multipli erano: la *carra* e la *botte*. I sottomultipli: la *pinta*, il *boccale*, il *quartino* ed il *bicchiere*.

Relazioni.

La carra = 10 brente.	La pinta = due boccali.
La botte = 8 brente.	Il boccale = due quartini.
La brenta = 36 pinte.	Il quartino = due bicchieri.

531. — 2° PER GLI ARIDI. L'unità era l'**emina.** I multipli erano: il *sacco* e la *carra;* ed i sottomultipli, il *coppo* ed il *cucchiaio*.

Relazioni.

La carra = 6 sacchi.	L'emina = 8 coppi.
Il sacco = 5 emine.	Il coppo = 24 cucchiari.

532. — ***Misure di peso.*** L'unità era la **libbra.** I multipli erano: il *rubbo*, il *quintale* e la *carra*. I sottomultipli: l'*oncia*, l'*ottavo*, il *danaro*, il *grano*, il *granotto*.

Relazioni.

La carra =	60 rubbi.	La libbra =	12 once.
	12 quintali.	L'oncia =	8 ottavi.
Il quintale =	5 rubbi.	L'ottavo =	3 denari.
Il rubbo =	25 libbre.	Il denaro =	24 grani.
		Il grano =	24 granotti.

(*) Le suddivisioni del trabucco quadrato sono rettangoli la cui lunghezza è sempre un *trabucco*, e l'altezza è un *piede* pel piede di trabucco quad.; un'*oncia* per l'oncia di trabucco quadr., ecc. Lo stesso dicasi delle suddivisioni del *piede quadrato;* dell'*oncia quadr.* e della *tavola*.

(**) Le suddivisioni del trabucco cubo formano dei parallelepipedi rettangoli aventi per base un trabucco quadr., e per altezza un piede pel piede di trabucco cubo; un'oncia per l'oncia di trabucco cubo, ecc.

533. — La **libbra farmaceutica,** che era i $^5/_6$ della libbra ordinaria, si divideva in 12 *once*, l'oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* e lo scrupolo in 20 *grani*.

534. — ***Misure monetarie.*** L'unità era la **lira,** la quale si divideva in 20 *soldi*, ed il soldo in 12 *denari*.

Le altre monete erano: la *Doppia di Savoia* di lire 28 e 9 soldi, ed il *Quadruplo di Genova* di lire 79, colle loro metà; la *pezza* da 8 soldi, colla sua metà; ed il *soldo*.

§ 2° — MISURE DELLE ALTRE PARTI D'ITALIA.

535. — Le antiche misure delle altre provincie italiane erano tante e sì svariate, che sarebbe cosa troppo lunga il volerle qui tutte noverare; ci limiteremo pertanto ad indicarne le principali nella seguente tavola, col loro valore in misure metriche.

Bolognese.

Lunghezza	*Piede* = 12 once; l'onc. = 12 punti (12 piedi = la pertica) = ...	*metri*	0,380098.
	Braccio o *Auna* = 20 once = ...	»	0,640039.
	Miglio = 500 pertiche = ...	*chilom.*	1,90049.
Superficie	*Tornatura* = 144 pertiche quad. o tavole; la tav. = 100 piedi q. = ...	*are*	20,8043.
Capacità (*)	*Corba* da grano = 2 staia = 8 quartaroli =	*litri*	78,645.
	Corba da vino = 60 boccali = 240 fogliette =	»	78,593.
Peso	*Libbra* = 12 once = 192 ferlini = 1920 carati = ...	*chilog.*	0,36185
Monetarie	Quelle della Romagna.		

Genovesato.

Lunghezza	*Palmo* = 12 once; l'onc. = 12 punti (12 palmi = la cannella) = ...	*metri*	0,24808.
	Canna = 10 palmi (stoffe) = ...	»	2,4808.
	Miglio = ...	*chilom.*	1,4880.
Superficie	*Cannella* = 144 palmi quadrati = ...	*are*	0,0886.
Capacità	*Mina* = 4 staia = 32 ottavi = ...	*litri*	116,5596.
	Barile da vino = 90 amole (2 barili = la mezzarola) = ...	»	79,016.
Peso	*Libbra grossa* (la libbra sottile = chilogr. 0,3167; 6 rubbi = cantàro) = .	*chilog.*	0,31766.
Monetarie	*Lira antica* = 20 soldi di 12 denari ciascuno = ...	*lire it.*	0,835.

(*) Delle due misure di capacità indicate in ogni provincia, la prima è per gli aridi, la 2ª pei liquidi.

Lombardia.

Lunghezza...	*Piede* = 12 pollici (6 piedi = il trabucco) =	*metri*	0,435185.
	Braccio = 12 once; l'onc. = 12 punti; il p. = 12 atomi (stoffe) = ...	»	0,594936.
	Miglio = 3000 braccia = ...	*chilom.*	1,78480.
Superficie..	— *Pertica* = 24 tavole; la tav. = 144 piedi quadrati = ...	*are*	6,5452.
Capacità	*Moggio* = 8 staia = 32 quartari = ...	*litri*	146,24.
	Brenta = 3 staia; lo st. = 4 quartari, il quart. = 8 boccali = ...	»	75,55.
Peso.....	— *Libbra grossa* = 28 once; l'on. = 24 denari (la sottile = 0,3267) = ...	*chilog.*	0,7625.
Monetarie..	— *Lira antica* (lira austriaca = 0,865) = ..	*lire it.*	0,760.

Modenese.

Lunghezza...	*Piede* (6 piedi = la pertica o il cavezzo) =	*metri*	0,523048.
	Braccio = ...	»	0,633150.
	Miglio = 500 pertiche = ...	*chilom.*	1,56910.
Superficie..	— *Biolca* = 72 tavole; la tav. = 4 pertiche quadrate = ...	*are*	28,3647.
Capacità	*Staio* = 2 mine; la mina = 4 quarti = .	*litri*	63,25.
	Quartaro = 90 boccali = ...	»	101,812.
Peso.....	— *Libbra* = 12 once; l'onc. = 12 ferlini (25 libb. = 1 peso = Cg. 8,509375) = .	*chilog.*	0,340455.
Monetarie..	— *Lira* = 20 soldi di 12 denari ciascuno = .	*lire it.*	0,382.

Napolitano.

Lunghezza...	*Palmo* che si divide in decimi, cent. ecc. =	*metri*	0,264550.
	Canna = 10 palmi = ...	»	2,64550.
	Miglio di 60 al grado = 700 canne = ...	*chilom.*	1,85185.
Superficie..	— *Moggio* = 100 canne quad., e si divide in parti decimali = ...	*are*	6,9987.
Capacità.....	*Tomolo* = 2 mezzette; la mezz. = 2 quarti; il quarto = 6 misure = ...	*litr*	55,545.
	Barile = 60 caraffe = ...	»	43,625.
Peso.....	— *Libbra* = 12 once (rotolo = libb. 2 7|9 = chilog, 0,8910) = ...	*chilog.*	0,320759.
Monetarie..	— *Ducato* = 10 carlini; il carl. = 10 grani di 12 cavalli = ...	*lire it.*	4,250.

Parmense.

Lunghezza...	*Braccio* = 12 once; l'onc. = 12 punti (6 brac. = la pertica) = ...	*metri*	0,5452.
	Braccio da seta (brac. da tela = m. 0,6395) =	»	0,5878.
	Miglio di 75 al grado = ...	*chilom.*	1,6130.
Superficie..	— *Biolca* = 6 staia; lo st. = 12 tav.; la tav. = 4 pertiche q. = ...	*are*	30,8144.
Capacità	*Staio* = 2 mine = 16 quartaroli = ...	*litri*	47,040.
	Brenta = 36 pinte = 72 boccali = ...	»	71,672.
Peso.....	— *Libbra* = 12 once; l'on. = 24 den. (25 lib. = rubbo) = ...	*chilog.*	0,3280.
Monetarie..	— *Lira antica* = ...	*lire it.*	0,25.

Piemonte (*).

Lunghezza	*Piede* = 12 once ; l'on. = 12 punti ; il p. = 12 àtomi (6 pied. = il trab.) =	*metri*	0,514403.
	Raso = 14 once del piede = ...	»	0,600137.
	Miglio di 45 al grado = ...	*chilom.*	2,469136.
Superficie	— *Giornata* = 100 tavole ; la tav. = 4 trabucchi quadr. = ...	*are*	38,1039.
Capacità	*Emina* = 8 coppi ; il cop. = 24 cucchiai (5 em. = sacco) = ...	*litri*	23,05.
	Brenta = 36 pinte; la pin. = 2 boccali di 2 quartini = ...	»	49,3069.
Peso	— *Libbra* = 12 once ; l'on. = 8 ottavi di 3 denari = ...	*chilog.*	0,36888.
Monetarie	— *Lira antica* = 20 soldi di 12 denari = ..	*lire it.*	1,180.

Romagna.

Lunghezza	*Piede* (5 piedi = il passo) = ...	*metri*	0,2976.
	Palmo mercantile (8 palmi = la canna) =	»	0,2491.
	Miglio = 1000 passi = 5000 piedi = ...	*chilom.*	1,48948.
Superficie	— *Pezza* = 16 catene quadrate = ...	*are*	26,4063.
Capacità	*Rubbio* = 4 quarti = 16 staia = 32 quartucci = ...	*litri*	294,46.
	Barile da vino = 32 boccali ; il boc. = 4 fogliette = ...	»	58,34.
Peso	— *Libbra* = 12 once di 24 denari ciascuna =	*chilog.*	0,3391.
Monetarie	— *Scudo* = 10 paoli; il paolo = 10 baiocchi =	*lire it.*	5,384.

Sardegna.

Lunghezza	*Palmo* = ...	*metri*	0,2625.
	Trabucco = 12 palmi = ...	»	3,1500.
	Miglio = ...	*chilom.*	2,51856.
Superficie	— *Starello* di Cagliari = ...	*are*	39,8675.
Capacità	*Starello* di 16 imbuti = ...	*litri*	49,17.
	Botte di 100 quartari = ...	»	502,66.
Peso	— *Libbra* = 12 once = ...	*chilog.*	0,40577.
Monetarie	— *Lira antica* = ...	*lire it.*	1,880.

Sicilia.

Lunghezza	*Palmo* = 12 once ; l'on. = 12 linee ; la lin. = 12 punti (8 pal. = la canna) =	*metri*	0,258098.
	Canna = 4 passetti = ...	»	2,062.
	Miglio = 5760 palmi = ...	*chilom.*	1,4866.
Superficie	— *Salma* = 4096 canne quadrate = ...	*are*	174,6258.
Capacità	*Tomolo* = 1 palmo cubo = 4 mondelli =	*litri*	17,193.
	Barile = 2 quartari = 40 quartucci = .	»	34,386.
Peso	— *Rotolo* = 2 libbre 1|2 = 30 once = ...	*chilog.*	0,79342.
Monetarie	— *Oncia* = 30 tari = 60 carlini = 600 grani =	*lire it.*	12,750.

(*) Per maggiori schiarimenti sulle misure del Piemonte, vedi pag. 194 e seguenti.

Toscana.

Lunghezza	*Braccio* = 20 soldi; il sol. = 12 den. (5 brac. = la canna agrim.) = ...	*metri*	0,583660.
	Canna per le stoffe = 4 braccia = ...	»	2,334.
	Miglio = braccia 2833,312 = ...	*chilom.*	1,65361.
Superficie	— *Quadrato* = 10 tavole = 100 pertiche = 1000 deche = 10000 bracc. q. = ..	*are*	34,0619.
Capacità	*Staio* = 2 mine = 4 quarti = 32 mezzette (3 staia = sacco) = ...	*litri*	24,363.
	Barile da vino = 20 fiaschi = 80 mezzette = 160 quartucci = ...	»	45,584.
Peso	— *Libbra* = 12 onc. = 288 denari di 24 grani =	*chilog.*	0,339542.
Monetarie	— *Lira* = 12 crazie = 20 soldi di 12 denari (fiorino = *lir. it.* 1,40) = ...	*lire it.*	0,85.

Veneto.

Lunghezza	*Piede* o *palmo* = 12 on. (5 piedi = il passo) =	*metri*	0,347398.
	Braccio o *auna* per la lana (bracc. per la seta = *m.* 0,6387) = ...	»	0,6833.
	Miglio = 1000 passi = ...	*chilom.*	1,73867.
Superficie	— *Migliaio* = 1000 passi quadr. (il passo q. = 25 piedi q.) = ...	*are*	30,2299.
Capacità	*Moggio* = 4 staia = 16 quarti = 64 quartaroli = ...	*litri*	333,268.
	Anfora = 4 bigonce = 8 mastelli = 192 bozze = ...	»	600,934.
Peso	— *Libbra grossa* = 12 once di 192 carati (la sottile = Cg. 0,3012) = ...	*chilog.*	0,476998.
Monetarie	— *Lira austriaca* = 20 soldi di 5 centes. =	*lire it.*	0,8506.

§ 3° — MISURE DEL TEMPO, DELLA CIRCONFERENZA e della temperatura.

536. — ***Misure del tempo*** (*). L'anno **civile,** cioè l'anno tal quale si considera abitualmente, è uguale a 365 giorni.

L'anno **solare,** o astronomico, cioè il tempo che impiega la

---

(*) Durante la rivoluzione francese si tentò di mettere la divisione del tempo in rapporto col sistema decimale: così l'anno, che cominciava coll'equinozio di autunno, veniva diviso in 12 mesi di 30 giorni, i quali si chiamavano *vendemmiale, brumale, frimale, nevoso, piovoso, ventoso, germile, florile, pratile, messifero, termifero* e *fruttifero.*

Ciascun mese dividevasi in tre *dècadi.* Il decimo giorno di ciascuna dècade era detto di *riposo.*

I cinque giorni poi che in ogni anno sopravanzavano erano chiamati *giorni supplementari.* Il giorno si divideva pure in dieci ore decimali, l'ora in 10 minuti, il minuto in 10 secondi, ecc.

Questo sistema però venne abbandonato fin dal suo nascere, poichè opponevasi alle inveterate abitudini, metteva incagli alle relazioni politiche e commerciali, urtava i principii religiosi, ed avrebbe recato incertezza nella cronologia.

terra per fare la sua rivoluzione intorno al sole, è di 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, 51 secondi $^{6}/_{10}$.

Il **giorno,** vale a dire il tempo che impiega la terra a girare sopra se stessa e riprodurci l'apparizione dei medesimi astri è di 24 ore. Il giorno civile si conta da una mezzanotte all'altra, e l'astronomico da un mezzogiorno all'altro.

La *giornata* si calcola ordinariamente di 12 ore.

L'ora uguaglia 60 minuti, il minuto 60 secondi, ed il secondo 60 terzi, ecc.

537. — Nel commercio l'anno si divide in 12 mesi di 30 giorni ciascuno, ciò che dà soltanto 360 giorni per l'anno commerciale, sebbene nell'anno civile abbiano:

Gennaio	31 g^{i}	Aprile	30 g^{i}	Luglio	31 g^{i}	Ottobre	31 g^{i}
Febbr.	28 »	Maggio	31 »	Agosto	31 »	Novem.	30 »
Marzo	31 »	Giugno	30 »	Settem.	30 »	Dicem.	31 »

Ogni quattro anni l'anno è *bisestile*, cioè ha 366 giorni, nel qual anno perciò il mese di febbraio si fa di 29 giorni.

538. — Si divide pure l'anno, sopratutto in agricoltura, in quattro parti quasi uguali, chiamate stagioni, di tre mesi ciascuna, e sono la *primavera*, l'*estate*, l'*autunno* e l'*inverno*.

La primavera comincia il 20 marzo, l'estate il 21 giugno, l'autunno il 23 settembre e l'inverno il 21 dicembre.

Cinque anni fanno un *lustro*, 15 anni un'*indizione*, e 100 anni un *secolo*.

539. — ***Misura della circonferenza.*** 1° DIVISIONE SESSAGESIMALE. La circonferenza si divide in 4 parti chiamate *quadranti*, e comprende 360 gradi.

Il *quadrante* comprende 90 gradi, il *grado* si divide in 60 minuti, il *minuto* in 60 secondi, il *secondo* in 60 terzi, il *terzo* in 60 quarti, ecc.

I gradi, i minuti, i secondi, ecc., si indicano rispettivamente con uno zero, un apice, due apici, ecc.

Per esempio, 40 gradi, 54 minuti, 25 secondi, 44 terzi s'indicheranno così: 40° 54′ 25″ 44‴.

Questa divisione si chiama *sessagesimale*, perciò dicesi anche grado sessagesimale la 360ª parte della circonferenza; come anche minuto sessagesimale la 60ª parte del grado, secondo, sessagesimale la 60ª parte del minuto, ecc.

540. — 2° DIVISIONE CENTESIMALE. La circonferenza si divide in 4 parti chiamate *quadranti*, ossia in 400 gradi.

Il *quadrante* comprende 100 gradi, i quali corrispondono ciascuno a 54 minuti sessagesimali.

Il grado si divide in 100 minuti o centigradi; questi in cento secondi o decimilligradi.

I sottomultipli di questa nuova divisione non si indicano con veruna abbreviazione, ma solo si scrivono dopo le unità principali separate colla virgola, e si leggono di due in due cifre.

Per esempio, 85 gradi, 65 minuti centigradi e 32 secondi si scrivono così: gradi 85,6532; il numero gradi 14,843565 si enuncia dicendo 14 gradi, 84 minuti, 35 secondi, 65 terzi.

Questa divisione procedendo di cento in cento si chiama *centesimale;* perciò i gradi, i minuti, i secondi... si dicono essi pure centesimali.

Essa è pochissimo seguita per le difficoltà che nell'uso della più parte degli strumenti matematici presenta, e specialmente perchè il 100 ha meno divisori del 60.

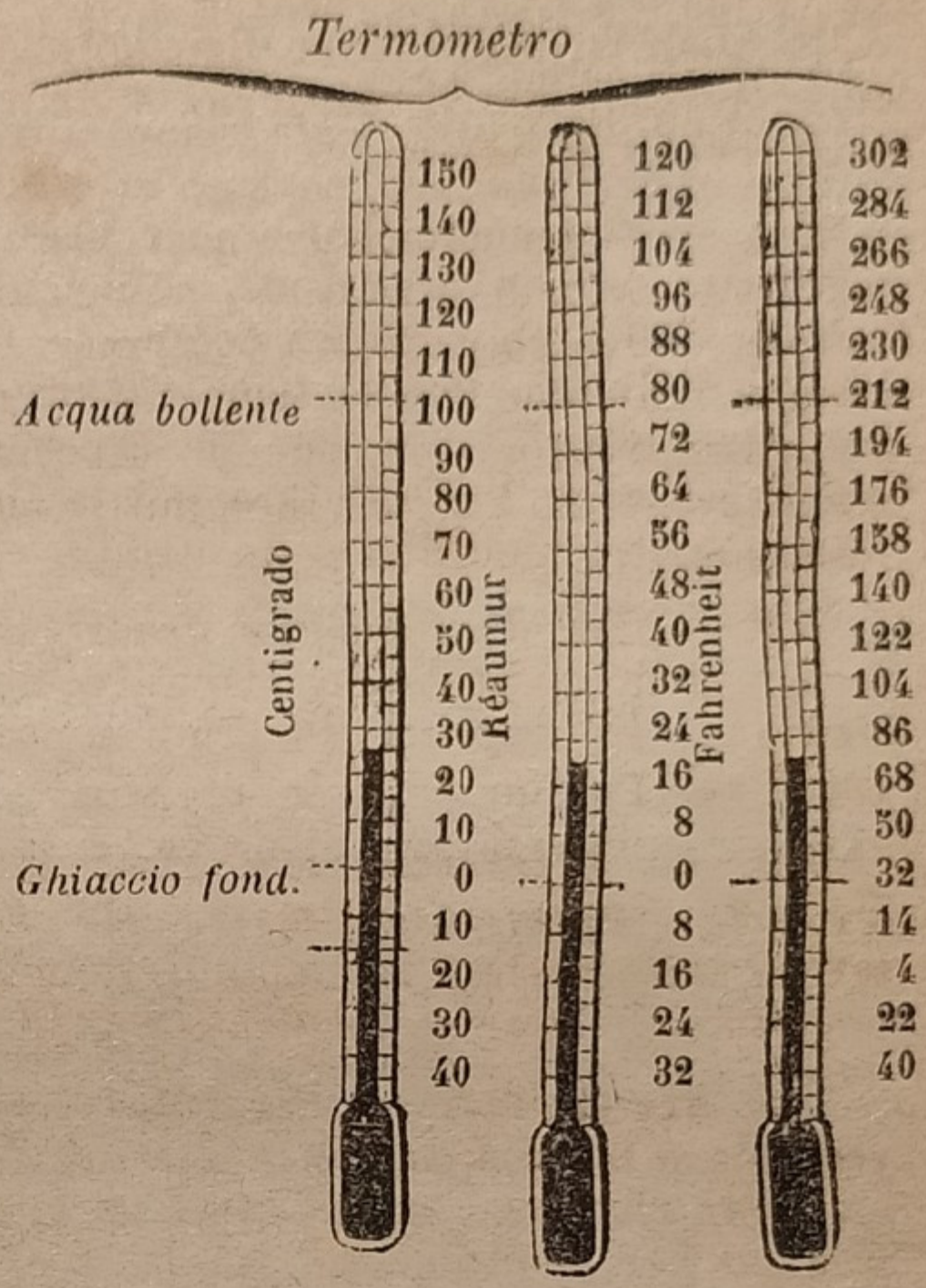
541. — Paragonando le divisioni centesimali colle sessagesimali e reciprocamente, si trova che:

1 grado	*C*	ugualia	0°	54′		*Sessagesimali.*	1 grado sess.	ug.	*gr.* $\frac{10}{9}$ = 1,111	*Centesimali.*
1 minuto	*C*	»	0′	32″	24‴		1 minuto	*S*	» *m.* $\frac{50}{27}$ = 1,85185	
1 secondo	*C*	»	0″	19‴	+ $\frac{11}{25}$		1 secondo	*S*	» *s.* $\frac{250}{81}$ = 3,086	
1 terzo	*C*	»		0‴	+ $\frac{243}{1250}$		1 terzo	*S*	» *t.* $\frac{1250}{243}$ = 5,144	

542. — ***Misure della temperatura.*** Si chiama **temperatura** d'un corpo il grado di calore che il corpo manifesta ai nostri sensi od agli strumenti che servono a riconoscerne l'intensità.

543. — Lo strumento di cui ci serviamo per misurare la temperatura dei corpi è il **termometro,** inventato del medico veneziano Santorio, sul principio del XVI secolo.

544. — Le sostanze ordinariamente impiegate nella costruzione di quest'istrumento sono il *mercurio* a l'*alcool.* A tal uopo si prende un tubo di cristallo ben *calibrato*, cioè di diametro uguale in tutta lunghezza, che è da 20 a 25 centimetri, ed avente all'estremità inferiore un piccolo rigonfio detto *recipiente.* Per introdurvi il mercurio, si espelle l'aria dal tubo, riscaldandone il recipiente, e quindi se ne immerge l'estremità aperta nel mercurio distillato, lasciandone entrare quanto basta a riempire il recipiente e una parte del tubo. S'espone allora al fuoco sinchè il mercurio bolla, e si elevi sino all'estremità del tubo per cacciarne tutta l'aria. Finalmente si chiude il tubo fondendone la sommità colla fiamma d'una lampada a spirito. Preparato così lo strumento, convien graduarlo.



545. — Tre diverse graduazioni si hanno del termometro: la graduazione **centigrada,** quella di **Réaumur** e quella di **Fahrenheit.**

Per formare le due prime s'immerge il tubo nel ghiaccio in fusione, tenendolo per l'estremità superiore; per tale immersione il mercurio condensasi e discende fino ad un punto a cui si ferma, e che si chiama *zero*. Indi s'immerge nell'acqua in bollizione, il mercurio si dilata, ascende e si nota al punto dov'esso si arresta. Lo spazio compreso fra i due punti così segnati, dicesi *intervallo fondamentale*. Se questo spazio si divide in 100 parti uguali si ha la graduazione centigrada; se lo si divide in 80 parti uguali, si ha la graduazione di Réaumur. Le divisioni suddette si chiamano *gradi;* esse vengono anche segnate sopra e sotto dei due punti estremi. Da ciò risulta che:

Il grado reaumuriano uguaglia $^{100}/_{80}$, *ossia* $^{5}/_{4}$, *del grado centesimale,* e reciprocamente *il grado centesimale uguaglia i* $^{4}/_{5}$ *del grado reaumuriano.*

546. — I punti estremi del termometro Fahrenheit sono questi: il punto estremo inferiore, ossia *zero*, è posto alla temperatura avuta da un miscuglio in parti uguali di sal marino e neve (*); ed il punto estremo superiore è, come per gli altri, alla temperatura dell'acqua bollente. Quest'intervallo vien diviso in 212 parti uguali. Il ghiaccio in fusione in questo termometro risponde al grado + 32: onde consegue, che l'intervallo fra il ghiaccio in fusione e l'acqua in bollizione resta diviso in 212 — 32, ossia 180 gradi. Perciò:

Il grado di Fahrenheit uguaglia $^{100}/_{180}$, *ossia* $^{5}/_{9}$ *del centesimale; e* $^{80}/_{180}$, *ossia* $^{4}/_{9}$ *del reaumuriano.*

Il termometro ordinariamente viene applicato ad un'assicella

(*) Si crede che Fahrenheit abbia avuto l'idea di prendere per limite inferiore della sua scala questo freddo vivissimo, dal freddo osservato in Islanda nel 1700.

sulla quale si segnano le divisioni: ed osservando a qual divisione corrisponde il mercurio, si trova subito la temperatura del luogo dove si espone.

547. — Il termometro a mercurio, che abbiamo brevemente descritto, dà con precisione, sufficiente agli usi più ordinari, la misura delle temperature comprese fra il ghiaccio fondente e l'acqua bollente. Per le temperature più basse si fa uso del termometro *alcoolico*, e per le esperienze delicate della fisica di quello ad aria. Per valutare poi le alte temperature, s'impiegano i termometri metallici o ad argilla chiamati **piròmetri.**

548. — Per distinguere i gradi superiori a *zero* dai gradi inferiori si fanno precedere rispettivamente dai segni + o —. Cosicchè + 18° esprime 18 gradi sopra *zero*, e — 12° indica 12 gradi sotto *zero*.

549. — ***Riduzione dei gradi centigradi in gradi reaumuriani, di Fahrenheit e reciprocamente.*** Da quanto venne detto ai numeri 545 e 546 possiamo dedurre le seguenti regole:

I^a ***Regola.*** — *Per ridurre i gradi centesimali in gradi reaum., si moltiplicano per 4 e dividesi quindi il prodotto per 5.*

Per ridurre i gradi cent. in gradi di Fahrenheit, si moltiplicano per 9, quindi si divide il prodotto per 5, ed aggiungesi 32 al quoto.

II^a ***Regola.*** — *Per ridurre i gradi R. in centigradi, si moltiplicano per 5, quindi si divide il prodotto per 4.*

Per ridurre i gradi R. in gradi di Fahrenheit, si moltiplicano per 9, quindi si divide il prodotto per 4, ed aggiungesi 32 al quoto.

III^a ***Regola.*** — *Per ridurre i gradi F. in cent., si leva 32, quindi si moltiplica il residuo per 5, e si divide questo prodotto per 9.*

Per ridurre i gradi F. in Réaum., si toglie 32, si moltiplica il residuo per 4, e dividesi il prodotto per 9.

1° *Esempio.* Quanto 25 gradi centig. valgono in gradi reaum.? $25 \times 4 = 100$, che diviso per $5 = 20$. Dunque 25 gradi centesimali corrispondono a 20 gradi R.

2° *Esempio.* Un termometro C. segna 30°, quanti ne segnerà il termometro di Fahrenheit?

$30 \times 9 = 270$, che diviso per $5 = 54$.
$54 + 32 = 86$, dunque: 30° C. corrispondono ad 86 F.

CAPO III.

CALCOLO DEI NUMERI COMPLESSI

550. — Il calcolo dei numeri complessi, che per l'introduzione del *Sistema metrico decimale* perdette assai della sua importanza, è però sempre indispensabile ne' computi relativi agli antichi *titoli*, e specialmente nelle misure del tempo, degli archi di circolo, le quali, come si è testè veduto, continuano ad essere in vigore come per l'addietro. Crediamo perciò opportuno di esporre nel presente capo le varie operazioni che al medesimo si riferiscono.

551. — Si chiama **numero complesso** qualunque numero concreto scomposto in più parti, riferite rispettivamente ed unità differenti.

Per es. 6 lire, 15 soldi, 8 denari è un numero complesso.

552. — Si chiama **frazione volgare** o **relativa** un numero complesso che non contiene unità principali.

Così 15^{ss} 8^{d} è una frazione volgare o relativa della lira; $15^{libb.}$ $7^{onc.}$ è una frazione relativa del rubbo.

553. — ***Modo di scrivere i numeri complessi.*** *Per iscrivere i numeri complessi si mettono le diverse unità le une dopo le altre, separandole con un punto, cominciando a scrivere quelle della specie maggiore alla sinistra, e poi di mano in mano quelle dell'infima specie alla destra.*

Per esempio, 5 trabucchi, 3 piedi, 7 once, 6 punti, 11 àtomi, si scriverà trab. 5. 3. 7. 6. 11.

§ 1° — RIDUZIONE.

554. — ***Riduzione dei numeri complessi in unità dell'infima suddivisione.*** Sia proposto di ridurre 18 palmi di Genova, 5 once e 11 punti, in punti.

Poichè un palmo vale 12 once, 18 palmi varranno 18 volte più, ossia 216 once, che aggiunte alle 5 fanno once 221. L'oncia vale 12 punti; dunque once 221 varranno 2652 punti, che uniti agli 11 daranno 2663 punti pel valore di 18 palmi, 5 once e 11 punti.

Regola. — *Per ridurre un numero complesso in unità dell'infima suddivisione, si moltiplichino le unità dell'ordine superiore pel numero che esprime in quante parti esso ordine si suddivide nell'ordine immediatamente inferiore, si aggiungano al prodotto le unità di quest'ordine, e continuisi così finchè abbiasi ridotto il tutto in unità dell'infima specie.*

555. — ***Riduzione delle frazioni volgari in frazioni ordinarie dell'unità principale.*** Venga proposto di ridurre 5 piedi di Bologna, 6 once, 8 punti in frazione ordinaria della pertica.

Colla riduzione precedente si trova che 5 piedi, 6 once, 8 punti uguagliano 800 punti, e che una pertica uguaglia 1782 punti. Dunque 5 piedi, 6 once, 8 punti $= {}^{800}/_{1728}$ ovvero $^{25}/_{54}$ di pertica.

Regola. — *Per ridurre una frazione volgare in frazione ordinaria dell'unità principale, riducansi tutte le suddivisioni dell'unità principale all'infima specie che si trova nel quesito; il totale sarà il numeratore d'una frazione che avrà per denominatore il numero d'unità di quest'ultima specie, necessarie a comporre l'unità principale.*

556. — ***Riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni volgari.*** Abbiasi $^{15}/_{22}$ di sacco di Piemonte da ridurre in emine, coppi, ecc.

La frazione $^{15}/_{22}$ si può considerare (282) come il quoto di 15 diviso per 22, ovvero come 15 sacchi divisi per 22.

Ma siccome un sacco vale 5 emine, 15 sacchi uguaglieranno 15×5, ossia 75 em. Dividendo ora 75 emine per 22 si troveranno 3 emine per quoto con 9 di residuo; 1 emina uguaglia 8 coppi, dunque 9 emine uguaglieranno 72 coppi; dividendo 72 per 22, si ha per quoto 3 coppi e per residuo 6. Un coppo uguaglia 24 cucchiari, e 6 coppi uguaglieranno dunque 144 cucchiari, il cui quoto per 22 è uguale a 6 ed avanzano 12 cucchiari, ossia $^{12}/_{22} = {}^{6}/_{11}$ di cucchiaio. Così $^{15}/_{22}$ di sacco uguagliano 3 emine, 3 coppi, 6 cucchiari e $^{6}/_{11}$ di cucchiaio.

Regola. — *Per ridurre una frazione ordinaria di qualsivoglia unità in frazione volgare, moltiplichisi il numeratore pel numero d'unità necessarie dell'ordine immediatamente inferiore per comporre un'unità principale, e dividasi il prodotto pel denominatore; se vi è un avanzo lo si moltiplichi pel numero di unità della seconda suddivisione contenute nella prima, e si prosegua quindi la divisione, finchè si ottenga l'unità dell'ultima suddivisione.*

557. — ***Riduzione delle frazioni volgari in decimali.*** Abbiasi da ridurre 7 mesi, 25 giorni, 18 ore in frazione decimale dell'anno.

Mesi 7, g. 25, ore 18=5658 ore (554), ovv. $^{5658}/_{8640}$ d'anno (555); riducendo $^{5658}/_{8640}$ in decimali si ottiene 0,654 col residuo 7440, il che dà per valore totale anni 0,654 + $^{7440}/_{8640}$, ovvero anni 0,654 + $^{31}/_{36}$ del millesimo dell'anno.

Regola. — *Per ridurre una frazione volgare in decimali la si riduca da prima a frazione ordinaria, quindi in decimale.*

558. — ***Riduzione delle frazioni decimali a frazioni volgari.*** Venga proposto di ridurre libbre di Piemonte 0,65742 in once, ottavi, ecc.

Primieramente la frazione 0,65742 può prendere (351) questa altra forma $^{65742}/_{100000}$, nel qual caso non si tratterrà più che di esprimerla in frazione volgare (556).

Ma il divisore rimanendo costantemente 100000, l'operazione si ridurrà evidentemente a moltiplicare la frazione decimale pel numero delle parti che l'unità principale contiene della prima suddivisione, ed a separare a destra del prodotto tante cifre decimali, quante ne sono nel moltiplicando. La cifra o le cifre che si troveranno a sinistra della virgola, saranno unità della prima suddivisione, e le cifre decimali a destra che avanzeranno, saranno di nuovo moltiplicate pel numero d'unità della seconda suddivisione necessarie per comporre un'unità della 1ª, e si opererà sopra questo secondo prodotto come sul primo, e così di seguito, finchè si sia pervenuto all'ultima suddivisione. Un'attenta occhiata che si dia al quadro dell'operazione basterà per far comprendere l'andamento da seguirsi, e si troverà che 0,65742 di libbra uguagliano once 7, ott. 7, den. 0, grani 8, granotti 2, granotti 2, e 0,13504 di granottino. Dunque libb. 0,65742 = 7 once, 7 ottavi, 0 denari, 8 grani, 2 granotti, 2 granottini + $^{13504}/_{100000}$ di granottino.

Operazioni.

libbre	0,65742
1 libbra =	12 once
	131484
	65742
once	7,88904
1 oncia =	8 ottavi
ottavi	7,11232
1 ottavo =	3 denari
denari	0,33696
1 denaro =	24 grani
	134784
	67392
grani	8,08704
1 grano =	24 granotti
	34816
	17408
granotti	2,08896
1 granotto =	24 granott.
	35584
	17792
granottini	2,13504

Regola. — *Per ridurre una frazione decimale in volgare d'una data unità, si riduca da prima la decimale in frazione ordinaria dell'unità data, poi (556) la si riduca in volgare.*

559. — ***Riduzione delle misure antiche espresse con numeri complessi in misure metriche.*** Sia il numero complesso 5 braccia di Milano, 7 once e 9 punti da ridurre in metri.

Riducendo in frazione ordinaria (555) si ha $^{813}/_{144}$ che è una frazione di braccio. Ora il braccio milanese uguaglia (535) metri

0,594936; per avere perciò il valore in metri della frazione $^{813}/_{144}$ basta moltiplicarla per 0,594936, il che dà

$$\frac{813 \times 0{,}594936}{144} = \text{m. } 3{,}358\ldots$$

Sia altresì la frazione volgare di peso modenese 8 libbre, 9 once e 6 ferlini da ridursi in chilogrammi.

Si riduce da prima in frazione ordinaria (555) e si ottiene $^{1266}/_{3600}$. Moltiplicando quindi $^{1266}/_{3600}$ per chilogr. 8,509375, valore del peso modenese (535) si ha $\frac{1266 \times 8{,}509375}{3600} = \text{Cg. } 2{,}992\ldots$

Se il numero dato non fosse complesso, cioè contenesse una sola specie d'unità, la riduzione riuscirebbe semplicissima, poichè in tal caso basterebbe moltiplicare il numero dato pel suo valore in misure metriche.

560. — ***Riduzione delle misure metriche in misure antiche.*** Venga proposto di ridurre litri 75,25 in brente, pinte, ecc... di Piemonte.

Si ha (535) che una brenta uguaglia litri 49,3069. Ora dividendo 75,25 per 49,3069 il quoziente intero darà il numero delle brente. Per avere poi le pinte, i boccali, ecc... si opererà come al n° 558, e si otterrà litri 75,25 = 1 br., 18 pinte, 1 bocc., 1 quart. + $^{377889}/_{493069}$ di quartino.

§ 2° — OPERAZIONI SUI NUMERI COMPLESSI

Addizione.

561. — ***Regola.*** *Per fare l'addizione dei numeri complessi bisogna scriverli gli uni sotto gli altri, per modo che le unità della stessa specie siano nella stessa colonna verticale; sommare successivamente le unità di ciascuna specie cominciando a destra; scrivere sotto ciascuna colonna il risultato ottenuto, se pur non oltrepassa l'unità dell'ordine immediatamente superiore; che se l'oltrepassa scrivesi solo la differenza e portansi le unità dell'ordine superiore alla colonna seguente.*

I tre seguenti esempi sopra misure di Piemonte rendono chiaro il procedimento.

	lire	*ss.*	*d.*	*sacchi*	*em.*	*cop.*	*brente*	*pinte*	*bocc.*
	30.	18.		25.	3.	4	24.	26.	1
	54.	9.	10	74.	4.	7	18.	25.	0
	1042.	11.	11	22.	2.	6	142.	35.	1
	342.	15.	8	43.	0.	7	89.	27.	1
Tot.	1470.	15.	5	166.	2.	0	276.	6.	1

La prova può farsi com'è stato indicato al n° 69, Parte prima.

Sottrazione.

562. — ***Regola.*** *Per far la sottrazione de' numeri complessi, bisogna disporli come nell'addizione, cioè gli uni sotto gli altri; sottrarre successivamente le diverse unità del sottraendo da quelle del minuendo. Se qualche unità del sottraendo è maggiore della corrispondente del minuendo, si aumenta questa di tante unità quante bastano a comporre un'unità dell'ordine immediatamente superiore. Il restante della sottrazione si fa come quella dei numeri interi.*

Esempi.

1°

Min.	*rub. di Parma*	26	*lib.* 18	*on.* 5
Sottraendo		15	23	9
Residuo	*rubbi*	10	*lib.* 19	*on.* 8

2°

Anni	1840	*mesi*	4	*gior.*	18	*or.*	3.
	1474		9		20		6.
	365		6		27		21.

Moltiplicazione.

563. — La moltiplicazione dei numeri complessi può presentare due casi:

1° Quando il solo moltiplicando è complesso.

2° Quando ambedue i fattori sono complessi, ovvero il solo moltiplicatore.

564. — ***1° Caso.*** **Moltiplicazione d'un numero complesso per un altro incomplesso.**

Esempio. Si sono comperate 4 balle di mercanzia pesanti ciascuna 48 rubbi di Piemonte, 17 libbre, 9 once, 5 ottavi; qual n'è il peso totale?

Operazione.

48 rubb., 17 libb., 9 once, 5 ott.
4

Prodotto totale 194 rubb., 21 libb., 2 once, 4 ott.

Moltiplicando le unità dell'ultima suddivisione per 4, si ha 5 ott. × 4 = 20 ott. = 2 once + 4 ott.; scrivo 4 ott. e ritengo 2 once.

(9 once × 4) + 2 once di riporto = 38 once = 3 libb. + 2 once; scrivo 2 once e ritengo 3 libbre.

(17 libb. × 4) + 3 libb. di riporto = 71 libb. = 2 rubb. + 21 libb.; scrivo 21 libb. e ritengo 2 rubbi.

(48 rubb. × 4) + 2 rubb. di riporto = 194 rubb. Il prodotto richiesto è dunque

194 rubb., 21 libb., 2 once, 4 ottavi.

Regola. — *Quando il solo moltiplicando è complesso ed il moltiplicatore incomplesso, si moltiplica ciascuna parte del moltiplicando, cominciando dalle minime, pel moltiplicatore; si aggiungono al prodotto dell'ordine immediatamente superiore quelle unità che potessero provenire dal prodotto della parte inferiore.*

565. — ***Osservazione.*** Il proposto problema potrebbe essere risolto nel modo seguente:

Ridotto il numero complesso in frazione ordinaria dell'unità principale, si moltiplica per l'altro fattore, ed il nuovo risultato si riduce in numero complesso.

Così nell'esempio precedente si avrebbe (555) 48 rubb., 17 libb., 9 onc., 5 ott. $= {}^{116909}/_{2400}$ di rubbo.

Moltiplicando per 4 si ha ${}^{467636}/_{2400}$. Riducendo questa frazione in un numero complesso (556), si ottiene ${}^{467636}/_{2400} = 194$ rubbi, 21 libb., 2 onc., 4 ottavi.

566. — **2° *Caso*. Moltiplicazione di un numero complesso, o incomplesso, per un altro complesso.**

1° *Esempio.* Quanto costano pesi modenesi 9, libbre 9, once 4 di piombo a ragione di lire 6, soldi 12, denari 7 il peso?

Operazione.

Lire 6 ss. 12 den. 7
Pesi 9 libb. 9 onc. 4

L.	59	ss.	13	den.	3			Prodotto di L. 6 ss. 12 den. 7 per 9		
	1	»	6	»	6	$^1/_5$	$= {}^{15}/_{75}$	»	per 5 libb.	$= {}^1/_5$ del peso.
	0	»	5	»	3	$^{16}/_{25}$	$= {}^{48}/_{75}$	»	per 1 »	$= {}^1/_5$ di 5 libb.
	0	»	5	»	3	$^{16}/_{25}$	$= {}^{48}/_{75}$	»	» »	» »
	0	»	5	»	3	$^{16}/_{25}$	$= {}^{48}/_{75}$	»	» »	» »
	0	»	5	»	3	$^{16}/_{25}$	$= {}^{48}/_{75}$	»	» »	» »
	0	»	1	»	9	$^{16}/_{75}$	$= {}^{16}/_{75}$	»	per 4 onc.	$= {}^1/_3$ della libb.

L. 62 ss. 2 den. $8 + {}^{73}/_{75}$ *Prodotto totale.*

Moltiplico da prima tutto il moltiplicando per 9 pesi come nel 1° caso, ed ottengo 59 lire 13 soldi 3 denari. 9 libb. $=$ 5 libb. $+$ 4 libb.; ora, 5 libb. essendo il $^1/_5$ di un peso, costeranno il $^1/_5$ di 6 lire 12 ss. 7 den., ossia una lira 6 ss. 6. den $+ {}^1/_5$ di denaro.

4 libb. $=$ 1 libb. $+$ 3 libb.; ora 1 libb. essendo il $^1/_5$ di 5 libb. deve costare il $^1/_5$ di 1 lira 6 ss. 6 denari $^1/_5$ di denaro, ossia 0 lir. 5 ss. 3 den. $+ {}^{16}/_{25}$ di denaro; 3 libb. costeranno 3 volte 0 lir. 5 ss. 3 den. $^{16}/_{25}$ di denaro.

4 onc. $= {}^1/_3$ d'una libbra, epperciò costeranno il $^1/_3$ di 0 lir. 5 ss. 3 den. $^{16}/_{25}$, ossia, 0 lir. 1 s. 9 den. $^{16}/_{75}$ di denaro. Sommando tutti questi prodotti parziali si ottiene per prodotto totale L. 62 soldi 2 denari $8 + {}^{73}/_{75}$ di denaro.

567. — ***Osservazione.*** Si potrebbe ancora risolvere questo problema col ridurre i due fattori complessi in frazione ordinaria dell'unità principale, poi moltiplicare queste tra loro e ridurre il risultato in un numero complesso.

2° *Esempio*. Vogliasi conoscere il prezzo di 45 brente di Piemonte, 28 pinte, 1 boccale a ragione di L. 17 la brenta.

Operazione.

Lire 17
Brente 45 p. 28 b. 1.

765 lire ss. den. Prodotto di L. 17 per 45 brente.
8 10 » » per 18 pinte = $^1/_2$ di brenta.
4 5 » » per 9 pinte = $^1/_2$ di 18 pinte.
0 9 $5 + ^3/_9$ » » 1 pinta = $^1/_9$ di 9 pinte.
0 4 $8 + ^6/_9$ » » 1 bocc. = $^1/_2$ di pinta.

Lire 778 ss. 9 den. 2 *Prodotto totale.*

Questo problema si potrebbe anche risolvere col metodo accennato al n° 565.

568. — Il metodo tenuto nella soluzione dei due precedenti problemi, chiamasi metodo delle *parti aliquote*. Per parti aliquote s'intendono quelle parti dell'unità principale o delle sue suddivisioni, le quali sono sottomultipli, o dell'unità principale o delle sue suddivisioni.

Regola. — *Per moltiplicare qualunque numero complesso o incomplesso per un altro complesso, bisogna moltiplicare da prima tutto il moltiplicando per le unità del moltiplicatore; scomporre se fa d'uopo successivamente le singole suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote delle corrispondenti unità principali; prendere quella parte del moltiplicando o de' suoi sottomultipli già ottenuti, indicata dalle parti aliquote; finalmente sommare tutti i prodotti parziali per avere il prodotto totale.*

Divisione.

569. — La divisione dei numeri complessi può presentare due casi:

1° Quando il dividendo ed il divisore sono di specie differente.

2° Quando il dividendo ed il divisore sono della stessa specie.

570. — ***1° Caso.*** **Divisione d'un numero complesso od incomplesso per un altro di specie diversa.**

In questo caso il quoziente è della stessa specie del dividendo (117).

Possono essere complessi o il solo dividendo, o il solo divisore, od entrambi.

571. — 1° *Il dividendo è complesso e il divisore incomplesso.* Es. Otto uomini fecero 59 trabucchi di Lombardia, 5 piedi, 4 pollici di muro; quanti trabucchi, piedi e pollici fece ciascuno?

Si comincia col dividere le unità principali per 8, il che dà di residuo 3 trabucchi che si riducono in piedi, ai quali si aggiungono i 5 che già si hanno, il che fa 23 piedi da dividere di nuovo per 8. Avanzano 7 piedi, che si riducono in pollici, ai quali si aggiungono i 4 del dividendo, e si hanno 88 pollici per nuovo dividendo, su cui si opera come sul preced.

Operazione.

		8
	59.5.4	*7tr. 2p. 11 poll.*
Resto trab.	3	
Piedi.....	× 6	
	18	
	+ 5	
Piedi.....	23	
Resto.....	7	
Pollici.....	×12	
	84	
	+ 4	
Pollici.....	88	
	00	

Si trova finalmente che ogni operaio fece 7 tr. 2 p. 11 pollici.

Regola. — *Quando il divisore è incomplesso, lo si consideri come un divisore astratto, e si effettui la divisione del dividendo pel divisore, dividendo da prima le unità principali; quindi riducasi il residuo in suddivisioni della specie seguente, aggiugnendovi quelle che si hanno già, e si divida pel divisore; si riduca il secondo residuo in suddivisione della specie seguente, che si divide pure pel divisore, e così di seguito, finchè non rimanga più veruna suddivisione.*

572. — 2° *Il solo divisore è complesso.* Es. Un negoziante delle Romagne con scudi 112 comprò 32 barili, 20 boccali e 3 fogliette di vino; quanto gli costò il barile?

32 barili 20 bocc. e 3 fogliette $= {}^{4179}/_{128}$ di barile (555).

Scudi 112 : $\frac{4179}{128} = \frac{112 \times 128}{4179} =$ 3 scudi 4 paoli 3 baiocchi $+ {}^{203}/_{4179}$ di baiocco.

Regola. — *Quando il solo divisore è complesso, lo si riduca in frazione ordinaria dell'unità principale, e si operi quindi la divisione colla regola ordinaria della divisione delle frazioni, riducendo il quoto in un numero complesso se occorre.*

573. — 3° *Il dividendo e il divisore sono complessi.* Es. Quanto costa un tomolo napolitano di riso, se ducati 216, carlini 8 e grani 5 sono il prezzo di tomoli 54, mezzette 1 e misure 4?

Ducati 216, carl. 8, grani $5 = {}^{21685}/_{100}$ di ducato.
Tomoli 54, mezz. 1, misure $4 = {}^{1312}/_{24}$ di tomolo.

$\frac{21685}{100} : \frac{1312}{24} = \frac{21685 \times 24}{100 \times 1312} =$ 3 duc. 9 carl. 6 gr. 8 cavalli $+ {}^{160}/_{1312}$ di cavallo.

Regola. — *Quando il dividendo ed il divisore sono complessi bisogna ridurli ambidue in frazioni ordinarie della rispettiva unità principale; operare quindi secondo la regola ordinaria della divisione delle frazioni, e ridurre finalmente il quoziente in un numero complesso se occorre.*

574. — **2° *Caso.* Divisione d'un numero complesso per un altro della stessa specie.**

In questo caso il quoziente è sempre di specie diversa dei due numeri dati; e dall'enunciato del problema si può scoprire facilmente qual sia il dividendo e quale debba essere la specie del quoziente.

Esempio. Se in un giorno si possono fare trabucchi di Piemonte 2 piedi 3 once 4 di lavoro; quanti giorni occorreranno per fare trabucchi 53 piedi 4 once 10, calcolando la giornata di 14 ore?

Trabucchi 53 piedi 4 once 10 $= {}^{3874}/_{72}$
» 2 » 3 » 4 $= {}^{184}/_{72}$

$$\frac{3874}{72} : \frac{184}{72} = \frac{3874 \times 72}{184 \times 72} = \frac{3874}{184} = \text{gior. } 21 \text{ or. } 0 \text{ min. } 45\ {}^{15}/_{23}.$$

Regola. — *Per dividere un numero complesso per un altro della stessa specie bisogna ridurli ambidue in frazione ordinaria dell'unità principale, e quindi dividere l'uno per l'altro: il quoziente si ridurrà in un numero complesso se occorre.*

Problemi sulle riduzioni de' numeri complessi (*).

494. Quanti punti sono in 24 trabucchi, 5 piedi, 10 once e 8 punti?

495. Riducansi in once 36 tese, 3 piedi.

496. Quanti piedi sono in rasi 34 $^3/_4$?

497. Un terreno di 8 giornate, 65 tav. e 9 piedi di tavola, fu venduto a ll. 0,05 il piede di tav.; quanto si ricavò?

498. Quante once cube sono in 30 trabucchi camerali, 2 piedi di trab. cam., 7 once di trab. camerale?

499. Quanto dovrò sborsare pel trasporto di 64 trabucchi c. di sabbia a ll. 0,10 il piede cubo?

500. Ridurre in frazione ordinaria della giornata, 25 tav. e 9 piedi di tavola.

501. Qual parte del trab.c. sono 5 piedi di tr.c., 10 once di tr.c. e 8 punti di trabncco cubo?

502. Qual parte del trabucco cubo è il trabucco camerale?

(*) Si avverte che i problemi sulle varie riduzioni e sulle quattro operazioni de' numeri complessi versano tutti sulle misure antiche del Piemonte.

503. Quanti mesi, giorni, ore, minuti e secondi sono nei $^{10}/_{11}$ d'un anno?

504. Quante pinte sono nei $^{3}/_{5}$ di 2 brente?

505. Un giardino, che uguaglia $^{11}/_{18}$ d'una giornata, quante tavole e piedi di trabucco q. contiene?

506. Riducansi soldi 14, denari 6 in decimali della lira.

507. Si riducano piedi 3, on. 9, pun. 9, at. 6 a decimali del trabucco.

508. Mesi 6, giorni 24, ore 12 e minuti 50, quanto fanno in decimali dell'anno?

509. Ridurre ll. 0,64 a soldi e denari.

510. Quante once e ottavi sono in libbre 0,45?

511. Adolfo impiegò anni 0,950 in un certo lavoro; a quanti mesi e giorni uguaglia questo tempo?

512. Qual è in piedi e once la lunghezza d'un muro di trabucchi 0,655?

513. Una carta geografica ha piedi quad. 0,654792 di superficie; trovare quante once e punti di piede quadrato contenga.

514. Quanti giorni, ore, minuti e secondi sono in 7632092 secondi?

515. In 3 carra, 7 brente e 15 pinte di vino, quanti El. sono?

516. Esprimere in Cm. la distanza fra Torino e Genova, sapendo ch'essa è di 67 miglia 95 trabucchi.

517. Quanto si ricava vendendo a ll. 42,25 l'ara un campo di 3 giornate, 85 tav. e 8 piedi di tavola?

518. Otto sacchi, 4 emine e 6 coppi di grano turco furono venduti per ll. 107,80; dicasi il prezzo del decalitro.

Problemi

sulle quattro Operazioni dei numeri complessi.

519. Flaviano in tre volte vendè le seguenti quantità di carne: la 1ª rub. 3, lib. 5, on. 8; la 2ª rub. 15, lib. 15, on. 10; e la 3ª rub. 12, lib. 18, on. 9; qual fu il peso totale della vendita?

520. Fare la somma delle seguenti quantità: carra 2, br. 9. pinte 31; car. 12, br. 3, p. 14; car. 9, br. 5, p. 34; car. 15, br. 7, p. 11.

521. Comprai le seguenti quantità di grano, cioè: sacchi 45, em. 4, cop. 6; sac. 27, em. 2, cop. 7; sac. 19, em. 3, cop. 5. Qual è il totale della compra?

522. Pietro ha 42 anni, 3 mesi, 24 giorni, 16 ore, 30 min.; Giacomo 35 an., 27 gior., 8 ore, 45 min.; Giovanni 25 an., 9 mesi, 19 ore, 35 min. Qual è l'età di tutti e tre insieme?

523. Il peso lordo d'una cesta di frutta è rub. 2, lib. 5, once 9; qual è il netto, se la tara monta a lib. 11, on. 8?

524. Da una botte di vino di brente 15, pinte 28, quart. 2, sono state cavate br. 7, p. 35, q. 3; quanto avanza?

525. Un magazzino conteneva sacchi 2475 di grano; quanto ne restò vendutone sacchi 1259, em. 4, cop. 5?

526. Levare trab. 45, piedi 5, once 9, punti 8, at. 10 da trab. 94, piedi 3, on. 8, p. 11, at. 7.

527. Rubbi 37, lib. 15, on. 4 di piombo a ll. 6 il rubbo, quanto costano?

528. Quanto costeranno carre 4, brente 7, pinte 12, quart. 3 di vino a ll. 135 la carra?

529. Dicasi quanto costino sacchi 45, em. 3, cop. 5 di grano, se la carra pagasi ll. 23.

530. Qual somma devesi sborsare per 9 giorni 11 ore e 15 min. di lavoro, pagato ll. 5 il giorno di 15 ore di lavoro?

531. Quanto importano rubbi 9, libbre 7, once 4 di frutta a ll. 2, soldi 12, den. 6 il rubbo?

532. Che pagherò io per brente 12 e pinte 27 di vino a lire 11, ss. 12, den. 6 la brenta?

533. Posto che rubbi 9, libb. 16 d'uva diano una brenta di vino, qual quantità d'uva occorrerà per fare brente 59 e pinte 32?

534. Qual è il costo di emine 14, coppi 5 di grano a ll. 4, ss. 15, den. 8 l'emina?

535. Brente 42 di vino costarono ll. 538, ss. 2, e den. 6; qual era il prezzo di una?

536. Per fare 15 brente di vino occorsero rubbi 131 e libb. 10 d'uva; quanti rubbi per una brenta?

537. Diedi a 15 povere famiglie 40 sacchi, 4 em., 3 cop. di grano; quanto ne toccò a ciascuna?

538. Acazio ricevè ll. 2090 per 4 anni, 7 mesi, 23 giorni; quanto ha guadagnato il dì?

539. Un terreno di 48 giornate e 75 tavole si pagò ll. 34373; quanto costò la giornata?

540. Viatore fece 26 miglia in 8 ore e 40 minuti; quanta strada faceva all'ora?

541. Un muratore fece 43 trab. di lavoro in 28 giorni e 8 ore; quanto lavoro fece egli al giorno calcolato di 12 ore?

542. Dario dopo 6 anni, 9 mesi e 15 giorni ricevette pel suo servizio ll. 1884, soldi 13 e den. 11; qual era l'annuo suo guadagno?

543. Quante brente di vino si faranno con 170 rubbi, 21 lib. d'uva, se ce ne vogliono 9 rub., 17 lib. per brenta?

544. Voglio distribuire 93 ll., 14 ss., 3 den. ad un certo numero di poveri, dando a ciascuno 3 ll., 9 ss., 5 den.; a quanti poveri potrò io fare limosina?

545. Posto che rubbi 9, lib. 17, on. 6 di grano facciano un sacco, quanti sacchi faranno 443 rub., 7 lib., 3 once?

546. La superficie d'una tavola è 9 piedi q., 11 once q., 9 punti q., 9 at. q.; qual n'è la lunghezza, sapendosi che la larghezza è 1 piede, 5 once e 9 punti?

547. Quanto tempo occorrerebbe ad un operaio per fare 38 metri di lavoro, se per un metro impiega 23 ore, 36 minuti e 47 secondi?

548. Un corriere percorse Cm. 82,175 in ore 6, 41′ e 26″; dicasi quanti Cm. percorresse all'ora.

Problemi di Ricapitolazione sulla IIª Parte.

549. Comprai vino da ll. 32, da 48 e da 60 l'El., in ugual quantità d'ogni specie, e spesi ll. 4200. Quanti Dl. di ciascuna specie?

550. Di tre fratelli il più giovane nacque il 25 settembre 1858; il 2° al 24 maggio 1862 aveva 9 anni 1 mese 8 giorni, ed il primogenito il 15 gennaio 1864 aveva precisamente l'età dei due altri insieme. Trovisi: 1° l'età di ciascuno il 20 aprile 1867; 2° l'epoca in cui nacque il maggiore.

551. Quante pezze da 20 centesimi sono in una cassa di 25 Cg. e 250 gr., se vuota pesa Cg. 2 e 10 grammi?

552. La pressione atmosferica essendo uguale al peso d'una colonna di mercurio alta m. 0,76, domandasi la pressione retta da un centimetro quadrato.

553. Qual è il valore d'una somma in argento, il cui peso uguaglia quello di 35 litri e 28 cl. d'acqua pura?

554. Qual è la capacità d'una botte la quale può contenere 638 Cl. di vino?

555. Se in un'ora Cesare fa m. 3,8 di lavoro, quanto ne farà in ore 27, 18′ e 13″?

556. Quanto rame contiene una somma di ll. 7880 in monete d'oro legali?

557. Quanti litri d'acqua conterrà un bacino lungo m. 10,75, largo 5,35, e profondo 12?

558. Dicasi quanti quadrettoni aventi 20 centimetri di lato, richieggansi a pavimentare un salone quadrato di met. 35,20 di lato?

559. Trovare la larghezza di un prato a forma rettangolare avente m.q. 228,3270 di superficie e m. 41 di lunghezza.

560. Quanto rame farà d'uopo mettere in 8 Cg. d'oro fino per ridurlo in moneta?

561. In 49 ore e 47′ un orologio avanzò di 7′ e 34″; quanto avanzava per ora?

562. Vuolsi tappezzare una superficie di 300 m.q. con carta da ll. 5,78 il rotolo. A quanto monterà la spesa, ove i rotoli siano lunghi 12 m. e larghi 29 centimetri?

563. Quant'oro fino bisognerà mettere con 7 Cg. di rame per avere oro monetato?

564. Due convogli partono insieme da uno stesso punto e per opposta direzione, facendo l'uno 36 Cm. l'ora, e l'altro 44; fra quante ore, minuti e secondi disteranno essi di 170 chilometri?

565. Due corrieri distanti l'uno dall'altro di Cm. 135 partono pel loro incontro alle ore 11 e 35′ di mattino; il 1° percorre 6 Cm. all'ora e l'altro 9. Dicasi: 1° l'ora dell'incontro, 2° quanti chilometri avrà fatto ciascuno.

566. Due forti sono posti sotto lo stesso meridiano, l'uno a 4° e 45′ di latitudine boreale, e l'altro a 10° e 22′, di latitudine australe; qual è la loro distanza in chilometri?

567. Quanti gradi e minuti sono in 33 Mm. e 12 Ettometri?

568. Dicasi quante volte la circonferenza contenga un arco di 7° e 43′.

569. Il grado della circonferenza terrestre essendo di 45 miglia piemontesi, trovisi in quanti giorni un uomo andrebbe dal polo all'equatore, ov'egli facesse un miglio e 500 trabucchi all'ora, e camminasse 9 ore il dì,

570. Quanto ricaverebbesi dalla vendita d'un vasello d'argento al titolo $^{950}/_{1000}$, e pesante Cg. 3,436?

571. Sapendosi che il suono corre 333 m. ogni secondo, e che una vedetta contò 7 secondi e mezzo dal lampeggiare d'un cannone all'udirne lo scoppio, dicasi a quanta distanza succedè lo sparo.

572. Se la pressione dell'aria è incirca uguale ad 1 Cg. per ogni cm. q., e la superficie del corpo umano è sottosopra m. q. 1,50, da qual peso d'aria è l'uomo premuto?

573. Un giardino ha la forma d'un trapezio, le cui basi sono m. 72,40 e m. 50,60 e l'altezza m. 36,50. Domandasi quanto costi a farlo coltivare, pagando 15 millesimi il metro quadrato.

574. Nel mezzo d'un prato si scavò uno stagno circolare di m. 75 di diametro; cerchisi di qual somma siasi diminuito il raccolto annuo, sapendo che ogni Ea. produce 1000 balle di fieno da ll. 35,50 il cento.

575. Quanti rasi di tela alta $1\ ^1/_3$ occorreranno per foderare un tappeto lungo rasi $12\ ^1/_6$ e largo $8\ ^7/_8$?

576. Posto che la città di Torino conti 180 mila abitanti e che ciascuno consumi lib. 1 e 4 once di pane il dì, trovisi quanti Cg. di farina si richieggano per la consumazione giornaliera, ove 1 Cg. di farina dia Cg. 1,33 di pane.

577. Un corpo pesa 256 gr. nell'aria e 137 gr. nell'acqua; qual n'è la densità?

578. Un sassolino pesa nell'aria 15 gr., ed una boccetta piena d'acqua pesa 246 gr.; ma se quello s'introduce in questa, essa pesa 254 gr. Qual è la densità del sassolino?

579. L'acqua ridotta in ghiaccio crescendo $7\ ^{14}/_{100}\ \%$ del suo volume, trovisi il volume d'un pezzo di ghiaccio prodotto dal congelamento di 1000 litri d'acqua.

580. Una colonna cilindrica in ghisa ha 18 cm. di diametro m. 4,50 d'altezza e 6,50 di densità; qual n'è il peso?

581. Quanto mi toccherà sborsare per far colorire in bronzo la colonna del problema antecedente a ragione di ll. 3,60 il m.q.

582. Quanti El. d'acqua può contenere una tinozza di m. 7,60 di circonferenza e 1,75 di profondità?

583. Vuolsi costrurre una piramide quadrangolare che abbia 5 m. per lato di base e 23 di altezza perpendicolare; qual ne sarà il volume?

584. Si sono fatte intonacare le quattro facce laterali della suddetta piramide di uno strato di cemento spesso m. 0,01; a quanto montò la spesa, se il lavoro costò ll. 75 il metro cubo?

585. Sapendo che il sole percorre 360° il dì, si determini quanto percorra all'ora ed al minuto.

586. Napoli è situata a 6°, 37′ e 30″ a levante di Torino; che ora sarà a Torino quando a Napoli sono le 10 antimeridiane?

587. Ammettendo che a fuoco vivo ogni cm.q. della superficie d'un liquido svapori 5 gr. d'acqua all'ora, in quanto tempo svaporeranno 105 litri d'acqua da una caldaia avente 6000 cm.q. di superficie?

588. L'acqua ridotta in vapore occupa uno spazio 1700 volte maggiore di prima; qual è dunque il peso del litro d'un sì fatto vapore?

589. Facendo passare 1 Cg. di vapore acqueo a 100° in Cg. 5 ½ d'acqua a zero, si hanno Cg. 6 ½ d'acqua a 100°. Ora in una caldaia contenente acqua a zero essendosi introdotto vapore acqueo a 100°, vi si trovarono poi 65000 Cg. d'acqua a 100°; cerchisi quant'acqua fredda vi fosse nella caldaia, e quanto vapore siasi introdotto.

590. Quando a Roma sono le 8 mattutine, a Torino sono solamente le 7.40′.48″; qual è la longitudine dell'una città rispetto all'altra?

591. Un monumento di forma conica avente m. 1,50 di diametro alla base, e 12 m. di altezza, costò ll. 6500; a quanto fu pagato il metro cubo?

592. Il monumento del problema antecedente dovendosi colorire a olio per ll. 4,50 il m.q., dicasi a quanto monterà la spesa, sapendo che il lato del cono è m. 12,023.

593. Una sfera ha 90 centimetri di diametro; qual n'è la superficie ed il volume?

594. Venezia e Perugia sono a un di presso sotto lo stesso meridiano: ma la 1ª trovasi a 45°.25′.35″ di latitudine, e la 2ª a 43°.6′.46″. Qual è in chilometri la distanza che le separa?

595. Un viaggiatore regola il suo orologio a Parigi; di quanti minuti sarà egli in ritardo giunto in Torino, la quale trovasi a 5° e 20′ long. orientale da Parigi?

596. Pagai ll. 0,85 il m.c. per lo scavamento d'un canale, che ha m. 275 di lunghezza, 1 metro di larghezza alla parte superiore, cm. 30 all'inferiore, e 7 dm. di profondità. Qual somma spesi?

597. I due diametri interni d'una secchia profonda 30 cm. sono, l'uno 28 cm. e l'altro 18; qual n'è la capacità?

598. Una botte il cui diametro maggiore è m. 0,75, ed il minore m. 0,60 ha m. 1,25 di lunghezza interna; qual è la sua capacità in ettolitri?

599. S'immerge nell'acqua un cubo d'oro puro, pesante quanto un cono d'argento di 14 cm. di diametro alla base e 21 di altezza; quant'acqua sposterà?

600. Qual è il peso del mercurio che può contenere un vaso di forma cilindrica, avente 25 dm.q. di base e 6 dm. d'altezza?

PARTE TERZA.

PROPORZIONI E REGOLE DIPENDENTI, EFFETTI DI COMMERCIO, CAMBIO, ECC.

CAPO I.

PROPORZIONI, INTERESSI, ANNUALITA' E SCONTO

§ 1° — RAPPORTI.

575. — Vedemmo già (n° 2), che per formarsi esatta idea di una quantità fa d'uopo paragonarla colla sua unità, e che il risultato di tale confronto chiamasi **numero.**

Invece però di paragonare una grandezza colla sua unità, si possono ancora paragonare due grandezze fra loro, purchè sieno della medesima specie, ed il risultato di questo confronto si chiama *rapporto;* dunque:

576. — Dicesi **rapporto** o **ragione** il risultato del paragone di due quantità della medesima specie.

577. — Si possono paragonare due quantità fra loro in due modi: o si vuol conoscere di quanto l'una superi l'altra; ovvero quante volte l'una contenga l'altra.

Il primo di questi confronti dando la differenza di due quantità, chiamasi *rapporto per differenza* od anche *aritmetico;* il secondo, esprimendo il quoto della divisione di due quantità dicesi *rapporto per quoto* od anche *geometrico.* Perciò:

578. — Chiamasi **rapporto aritmetico** di due numeri il residuo della loro sottrazione; e **rapporto geometrico** il quoto della loro divisione.

Così il rapporto aritmetico di 12 a 4 è 8, perchè $12 - 4 = 8$; parimenti il rapporto geometrico di 12 a 4 è 3, perchè $12 : 4 = 3$.

579. — I numeri che si paragonano diconsi **termini** del *rapporto;* il primo chiamasi **antecedente** ed il secondo **conseguente.**

Il rapporto aritmetico si indica con un punto, ed il geometrico con due.

Esempio . . $\begin{cases} 12 \,.\, 4 \text{ esprime il rapporto aritmetico di } 12 \text{ a } 4. \\ 12 : 4 \text{ esprime un rapporto geometrico di } 12 \text{ a } 4, \end{cases}$

ed entrambi si enunciano 12 *sta a* 4.

580. — *Un rapporto aritmetico non cambia se si aumentano o si diminuiscono d'un medesimo numero i suoi due termini* (54-6°).

581. — *Un rapporto geometrico non cambia quando si moltiplicano o si dividono i suoi due termini per uno stesso numero* (182).

Da quest'ultima proprietà risulta:

1° Che si possono semplificare i termini d'un rapporto geometrico quando contengono fattori comuni; 2° che si possono ridurre in numeri interi i termini del rapporto, quando sono frazioni o numeri frazionari.

Così $12 : 18 = \frac{12}{6} : \frac{18}{6} = 2 : 3;$

e $\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2 \times 7}{5 \times 7} : \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = 2 \times 7 : 4 \times 5 = 14 : 20.$

582. — ***Rapporti inversi.*** Due rapporti geometrici diconsi **inversi** o **reciproci** l'uno all'altro, quando l'antecedente del primo è conseguente del secondo, e viceversa.

Tali sono, per es., 12 : 4 e 4 : 12 equivalenti a $\frac{12}{4}$ e $\frac{4}{12}$.

Il prodotto di due rapporti inversi uguaglia l'unità (335).

§ 2° — PROPORZIONI.

583. — Allorchè due rapporti sono uguali, quest'uguaglianza costituisce una *proporzione*. Dunque:

La **proporzione** è l'uguaglianza di due rapporti.

Secondo poi che i rapporti sono aritmetici o geometrici, la proporzione viene appellata *aritmetica* o *geometrica*. Perciò:

584. — Chiamasi **proporzione aritmetica** o **equidifferenza** l'uguaglianza di due rapporti aritmetici; e **proporzione geometrica,** o semplicemente **proporzione,** l'uguaglianza di due rapporti geometrici.

Così l'ugualianza $7 \,.\, 3 = 9 \,.\, 5$, ossia $7 - 3 = 9 - 5$, forma un'equidifferenza, la quale si scrive

$$7 \,.\, 3 : 9 \,.\, 5,$$

ed enunciasi 7 *sta a* 3 *come* 9 *sta a* 5.

Similmente l'uguaglianza $12 : 4 = 6 : 2$, ossia $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$, forma una proporzione, la quale si scrive

$$12 : 4 :: 6 : 2$$

ed enunciasi 12 *sta a* 4 *come* 6 *sta a* 2.

In qualsivoglia proporzione, aritmetica o geometrica, il primo ed il terzo termine diconsi *antecedenti*, il secondo ed il quarto *conseguenti*. Parimenti il primo ed il quarto vengono chiamati **estremi,** il secondo ed il terzo **medii.**

585. — Qualunque proporzione che abbia i medii uguali dicesi **proporzione continua.**

Esempio $18 . 12 : 12 . 6$; e $28 : 14 :: 14 : 7$.

Nell'equidifferenza continua il termine medio chiamasi *medio differenziale* o *aritmetico*, e ciascun estremo dicesi *terzo proporzionale aritmetico.*

Nella proporzione continua il termine medio prende il nome di *medio proporzionale*, e ciascun estremo *terzo termine proporzionale.*

586. — L'equidifferenza continua $18 . 12 : 12 . 6$ si può scrivere più brevemente $\div 18 . 12 . 6$, che si enuncia *come* 18 *sta a* 12 *sta a* 6; e la proporzione continua $28 : 14 :: 14 : 7$ si scrive pure $\because 28 : 14 : 7$ e si enuncia *come* 28 *sta a* 14 *sta a* 7.

Proprietà delle equidifferenze.

587. — ***Teorema 1°.*** *In qualunque equidifferenza la somma dei medii uguaglia la somma degli estremi.*

Sia l'equidifferenza $a . b : c . d$,

si ha (578, 584) $a - b = c - d$; trasportando i termini b e d, essi cambiano segno (150) e risulta

$$a + d = c + b.$$

588. — ***Corollario 1°.*** *Il medio differenziale fra due numeri uguaglia la metà della loro somma.*

In vero, dall'equidifferenza $12 . x : x . 8$, si ha $2x = 12 + 8$;

donde $$x = \frac{12 + 8}{2}.$$

Per analogia si chiama **media aritmetica** o semplicemente **media** di più quantità la somma delle medesime divisa pel loro numero.

589. — ***Corollario 2°.*** *In ogni equidifferenza un medio uguaglia la somma degli estremi diminuita dell'altro medio; ed un estremo uguaglia la somma dei medii diminuita dell'altro estremo.*

Dall'equidifferenza $9 . 6 : x . 7$, si ha $6 + x = 9 + 7$

donde $$x = 9 + 7 - 6 = 10.$$

590. — ***Teorema 2°*** *Quando la somma di due numeri è uguale alla somma di due altri, questi quattro numeri formano un'equidifferenza, in cui i medii sono i due numeri d'una somma, e gli estremi quelli dell'altra.*

Sia $a+d=b+c$. Trasportando i termini d e c, si ottiene

$$a-c=b-d, \text{ ossia (584) } a\,.\,c : b\,.\,d.$$

591. — ***Corollario 1°.*** *In ogni equidifferenza si può aumentare o diminuire della stessa quantità un medio od un estremo,* poichè la somma degli estremi uguaglierà sempre quella dei medii.

592. — ***Corollario 2°.*** *In ogni equidifferenza si possono* alternare *ed* invertere (*) *i medii e gli estremi,* poichè tali cambiamenti non alterano l'uguaglianza che esiste tra la somma degli estremi e quella dei medii.

Proprietà delle Proporzioni.

593. — ***Teorema 1°.*** *In ogni proporzione il prodotto dei medii uguaglia il prodotto degli estremi.*

Sia $a : b :: c : d$; si ha (584) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, e moltiplicando i due membri successivamente per b e per d, risulta (283)

$$ad = cb.$$

594. — ***Corollario 1°.*** *Il medio proporzionale tra due numeri uguaglia la radice quadrata del loro prodotto.*

Sia $a : x :: x : b$; si ha $x^2 = ab$; donde

$$x = \sqrt{ab}.$$

595. — ***Corollario 2°.*** *In ogni proporzione un estremo uguaglia il prodotto dei medii diviso per l'altro estremo, e un medio uguaglia il prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.*

Sia $a : b :: c : x$; si avrà $ax = bc$; donde

$$x = \frac{bc}{a}.$$

596. — ***Teorema 2°.*** *Quando il prodotto di due numeri è uguale al prodotto di due altri, questi quattro numeri formano una proporzione, nella quale i due numeri di un prodotto sono gli estremi od i medii, ed i due numeri dell'altro i medii o gli estremi.*

Sia $ad = bc$. Dividendo ambo i membri dell'uguaglianza successivamente per d e per c, si ha (174) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; donde (584)

$$a : c :: b : d.$$

(*) *Alternare* i medii (o gli estremi) significa mettere un medio (od un estremo) al posto dell'altro. *Invertere* i medii e gli estremi significa porre i medii al posto degli estremi e viceversa.

597. — ***Corollario 1°.*** *In ogni proporzione si può moltiplicare o dividere un medio ed un estremo per lo stesso numero, e si può altresì moltiplicare un medio od un estremo e dividere per lo stesso numero l'altro medio o l'altro estremo;* giacchè con tutte queste operazioni, il prodotto degli estremi sarà sempre uguale a quello dei medii.

Questo principio serve a liberare dai loro denominatori i termini frazionari d'una proporzione od a semplificarli.

Così nella proporzione $\frac{6}{5} : 9 :: \frac{12}{7} : x$, moltiplicando il 1° ed il 3° termine per 5×7, si avrà

$$6 \times 7 : 9 :: 12 \times 5 : x,$$

ovvero semplificando, $7 : 9 :: 2 \times 5 : x$.

598. — ***Corollario 2°.*** *In ogni proporzione si possono alternare ed invertere i medii e gli estremi;* poichè in tutti questi cambiamenti il prodotto dei medii è sempre uguale al prodotto degli estremi.

Da ciò segue che quando fra quattro numeri a, b, c, d havvi la relazione $ad = bc$, questi quattro numeri si possono disporre in otto proporzioni diverse, cioè:

1°	$a : b :: c : d$	5°	$b : a :: d : c$
2°	$a : c :: b : d$	6°	$b : d :: a : c$
3°	$d : b :: c : a$	7°	$c : d :: a : b$
4°	$d : c :: b : a$	8°	$c : a :: d : b.$

599. — ***Teorema 3°.*** *Quando due proporzioni hanno un rapporto comune, i due altri rapporti formano una proporzione.*

Sieno le proporzioni $a : b :: c : d$ e $m : n :: c : d$;

se ne deduce..... $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$.

Ma due quantità uguali ad una terza essendo uguali tra loro, si avrà $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, ossia

$$a : b :: m : n.$$

600. — ***Teorema 4°.*** *Se due proporzioni hanno gli antecedenti od i conseguenti uguali, i quattro altri termini formano una proporzione.*

Abbiansi le due proporzioni $a : b :: c : d$; $a : m :: c : n$.

Alternando i medii, si ha $a : c :: b : d$; $a : c :: m : n$,

dunque (n° ant,) $b : d :: m : n$.

Si farebbe un'analoga dimostrazione se le due proporzioni avessero i conseguenti uguali.

601. — ***Teorema 5°.*** *In ogni proporzione la somma o la differenza dei due primi termini, sta alla somma o alla differenza dei due ultimi, come il primo sta al terzo, ovvero come il secondo sta al quarto.*

Sia la proporzione $a : b :: c : d$; da cui ricavasi

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Aggiungendo un'unità ai due membri dell'uguaglianza, si ha

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \text{ ossia (303), } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

e perciò $a + b : b :: c + d : d$; ovvero alternando si ha

$$(\beta) \qquad a + b : c + d :: b : d.$$

Ora, alternando i medii della proporzione proposta, si avrà

$$a : c :: b : d.$$

Queste due ultime proporzioni avendo un rapporto comune, si avrà pure (γ) $a + b : c + d :: a : c$

Si dimostra in modo analogo la seconda parte della proposizione, colla sola differenza che invece di aggiungere l'unità ai due membri dell'uguaglianza (α) la si toglie, e risulta

$$(\delta)\ a - b : c - d :: b : d, \quad (\varepsilon)\ a - b : c - d :: a : c.$$

602. — **Corollario 1°**. *In ogni proporzione la somma o la differenza dei due primi termini, sta al primo o al secondo, come la somma o la differenza dei due ultimi sta al terzo od al quarto.*

Alternando i medii delle proporzioni (β), (γ), (δ) e (ε), si rende chiara la verità di questa proposizione.

603. — **Corollario 2°**. *In ogni proporzione la somma dei due primi termini sta alla loro differenza, come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.*

Dalle proporzioni (γ) e (ε) si ricava

$a + b . c + d :: a - b : c - d$, e quindi alternando si ha

$$a + b : a - b :: c + d : c - d.$$

604. — **Teorema 6°**. *In ogni proporzione la somma o la differenza degli antecedenti, sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente.*

Sia $a : b :: c : d$. Alternando i medii, si ha $a : c :: b : d$.

Quindi (602) $a + c : c :: b + d : d$ e $a - c : c :: b - d : d$; dunque (598) $a + c : b + d :: c : d$ e $a - c : b - d :: c : d$.

605. — **Corollario 1°**. Da queste due proporzioni si deduce

$$a + c : b + d :: a - c : b - d;$$

cioè che la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti.

606. — **Corollario 2°**. *In una serie di rapporti uguali, la somma di qualsivoglia numero di antecedenti sta alla somma dei loro conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente.*

Di fatti, sia $a : b :: c : d :: e : f :: g : h$.

I due primi rapporti danno $a : b :: c : d$, donde (604)

$$a + c : b + d :: c : d;$$

ma $c : d :: e : f$, quindi (599) $a + c : b + d :: e : f$;

donde (604) $a + c + e : b + d + f :: e : f$;

ma $e : f :: g : h$; quindi $a + c + e : b + d + f :: g : h$, donde

$$a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h.$$

607. — ***Teorema 7°.*** *Moltiplicando termine a termine due o più proporzioni, i prodotti formano ancora una proporzione.*

Abbiansi le tre proporzioni

$$\left.\begin{array}{l} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \\ m : n :: p : q \end{array}\right\} \text{ da esse ricavasi } \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \\ \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \end{array}\right.$$

Moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze, si ha (324)

$\frac{a \times e \times m}{b \times f \times n} = \frac{c \times g \times p}{d \times h \times q}$; perciò si avrà pure (584)

$$a \times e \times m : b \times f \times n :: c \times g \times p : d \times h \times q.$$

Dicesi rapporto *composto* quello, i cui termini sono il prodotto di corrispondenti termini di altri rapporti, e proporzione *composta* quella che risulta dal moltiplicare termine a termine due o più proporzioni.

608. — ***Corollario 1°.*** *Le potenze simili di quattro numeri che sono in proporzione, formano una nuova proporzione.*

Così se si ha $a : b :: c : d$, si avrà pure $a^3 : b^3 :: c^3 : d^3$.

609. — ***Corollario 2°.*** *Le radici simili di quattro numeri che sono in proporzione, formano una nuova proporzione.*

Quantunque tale proporzione sia la reciproca della precedente, tuttavia la si può dimostrare direttamente in questo modo:

Sia la proporzione $a : b :: c : d$; essa dà l'uguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Estraendo da ambo i membri la radice dello stesso grado, per es., la cubica, si ha

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}, \text{ ovv. } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}; \text{ donde}$$

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}.$$

610. — ***Teorema 8°.*** *Dividendo termine a termine due proporzioni, i quozienti sono ancora in proporzione*

Sieno le due proporzioni $a : b :: c : d$ e $m : n :: p : q$; se ne deduce $a \times d = b \times c$ e $m \times q = n \times p$.

Dividendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene

$$\frac{a \times d}{m \times q} = \frac{b \times c}{n \times p}\text{; ossia } \frac{a}{m} \times \frac{d}{q} = \frac{b}{n} \times \frac{c}{p} \text{ donde}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}.$$

611. — ***Quantità direttamente proporzionali.*** Due quantità si dicono *direttamente proporzionali* od in *ragione diretta*, quando crescendo o diminuendo una di esse l'altra cresce o diminuisce nello stesso rapporto; vale a dire, il rapporto di due valori dati alla prima, è uguale al rapporto dei valori corrispondenti della seconda, presi nello stesso ordine.

Così il prezzo d'una merce è *direttamente proporzionale* al suo peso; poichè è evidente che duplicando, triplicando... il peso della merce, sarà pure duplicato, triplicato il suo prezzo. Onde chiamando P e P' i due pesi d'una merce, V e V' i rispettivi loro valori, si dovrà avere $\frac{P}{P'} = \frac{V}{V'}$.

Sono pure direttamente proporzionali: il cammino percorso da un corriere ed il tempo impiegato a percorrerlo, il lavoro fatto da più operai ed il tempo impiegato a farlo, ecc.

612. — ***Quantità inversamente proporzionali.*** Due quantità si dicono *inversamente proporzionali* od in *ragione inversa* o *reciproca*, quando crescendo o diminuendo una di esse, l'altra diminuisce o cresce nello stesso rapporto, e viceversa; vale a dire, il rapporto di due valori dati alla prima, è uguale al rapporto dei valori corrispondenti della seconda, ma presi in ordine inverso.

Così il numero d'operai è *inversamente proporzionale* al tempo ch'essi impiegano a fare un dato lavoro poichè è evidente che duplicando, triplicando... il numero degli operai, il tempo da essi impiegato sarà ridotto ad una metà, ad un terzo... Onde chiamando N e N' i due numeri d'operai, T e T' i tempi corrispondenti, si dovrà avere $\frac{N}{N'} = \frac{T'}{T}$.

Sono pure inversamente proporzionali le velocità di due corrieri e i tempi che impiegano a percorrere un dato spazio. I valori di due frazioni aventi lo stesso numeratore e i loro denominatori. I prezzi di due valori e la facilità della loro esecuzione, ecc.

§ 3° — REGOLA DEL TRE SEMPLICE.

613. — La **regola del tre** è quella che serve a trovare qualsivoglia termine d'una proporzione, i tre altri essendo dati.

Si distinguono due sorta di regole del tre: la *semplice* e la *composta*.

La **regola del tre semplice** è quella in cui ciascun termine della proporzione è formato da un sol numero.

Essa può essere **diretta** o **inversa** secondo che le due specie di quantità fornite dal problema sono *direttamente* o *inversamente proporzionali*.

614. — ***Regola del tre semplice diretta.*** *Esempio.* 6 pezze di panno costano 3000 lire; quanto costeranno 16 pezze dello stesso panno?

Si osservi anzitutto che l'enunciato di questo problema (e lo stesso può dirsi di qualsivoglia problema sulla regola del tre semplice) consta di due parti. Nella prima sono espresse due specie di quantità, cioè *pezze* e *lire*, i cui valori 6 e 3000, dipendenti l'uno dall'altro, sono cogniti. Nella seconda ricompariscono le stesse quantità, ma con altri valori, dei quali uno è incognito.

Ora per maggior facilità nella risoluzione di sì fatti quesiti bisogna primieramente fare ciò che chiamasi ***traduzione***, ossia ***preparazione del problema***, la quale consiste nello scrivere i quattro termini sopra due linee, ponendo nella 1ª i valori *primitivi* e nella 2ª i *secondi* valori per modo che i numeri omogenei siano l'uno sotto l'altro, e l'incognita rappresentata con x, si trovi a destra come qui sotto (*).

	pezze	lire	
1ª Specie	6	3000	2ª Specie.
	16	x	

Tradotto che è il problema, lo si può risolvere in due modi, cioè col *metodo naturale*, detto *di riduzione all'unità*, o col *metodo delle proporzioni*.

Perciò nelle regole dipendenti dalle proporzioni faremo spesso uso dei due metodi indicati rispettivamente sotto la denominazione di 1° *metodo*, e di 2° *metodo*.

(*) Sebbene l'incognita x possa occupare indifferentemente qualsiasi posto nella traduzione, tuttavia preferiamo porla nell'ultimo termine per maggior facilità nella risoluzione dei problemi col metodo della riduzione all'unità.

Soluzione.

1° *Metodo.* — Poichè 6 pezze costano ll. 3000

1 pezza costa 6 volte meno, ossia $\frac{3000}{6}$

16 pezze cost. 16 volte più ossia $\frac{3000\times16}{6}=8000.\ R.$

2° *Metodo.* — Poichè 6 pezze di panno costano ll. 3000, un numero doppio, triplo,... di pezze, costerà due, tre,... volte ll. 3000; dunque il numero delle pezze e quello delle lire sono direttamente proporzionali, perciò si ha (611).

$\frac{6}{16}=\frac{3000}{x}$, ossia $6:16::3000:x$: donde (595)

$$x=\frac{16\times3000}{6}=8000 \text{ ll. } R.$$

615. — ***Regola del tre semplice inversa.***

Esempio. Se 20 operai fanno un lavoro in 30 giorni, quanti operai occorreranno per farlo in 50 giorni?

Traduzione:

giorni	operai
30	20
50	x

Soluzione.

1° *Metodo.* — Se in 30 giorni il lavoro vien fatto da 20 operai, acciocchè venga finito in 1 giorno, bisogneranno 30 volte più operai, ossia 30×20, e per farlo in 50 giorni ce ne bisogneranno 50 volte meno, ossia $\frac{30\times20}{50}=12$ operai. *R.*

2° *Metodo.* — Poichè 20 operai impiegano 30 giorni per fare il lavoro, è chiaro che un numero doppio, triplo,... di operai lo faranno in un numero di giorni due, tre,... volte minore, dunque i due numeri d'operai sono inversamente proporzionali ai due numeri di giorni impiegati.

Perciò (612) si ha

$\frac{30}{50}=\frac{x}{20}$ ossia $30:50::x:20$; donde

$$x=\frac{30\times20}{50}=12 \text{ operai. } R.$$

616. — Dal modo tenuto nei due precedenti esempi si può inferire la seguente

Regola. — *Per risolvere col metodo delle proporzioni un problema il cui enunciato presenta una regola del tre semplice, bisogna:* 1° *Fare la traduzione del problema;* 2° *Esaminare se le quantità siano* direttamente *o* inversamente proporzionali ;

3° *Stabilire la proporzione scrivendo per* 1° *rapporto i due valori della* 1ª *specie, e per* 2° *rapporto quelli della* 2ª *specie, avvertendo di scrivere questi ultimi nello stesso ordine dei due primi nella regola del tre* diretta, *e scriverli in ordine inverso nella regola del tre* inversa.

617. — ***Osservazione.*** I valori dell'incognita, ottenuti nei precedenti esempi, possono scriversi così

$$x = 3000 \times \frac{16}{6} \text{ e } x = 20 \times \frac{30}{50}.$$

Quindi chiamando *diretto* il rapporto allorchè ha per antecedente quello dei due numeri omogenei, il quale nella *traduzione* era sulla linea dell'incognita, esso sarà *inverso* quando avrà per antecedente il numero posto sull'altra linea (582); cosicchè $\frac{16}{6}$ sarà il rapporto diretto delle pezze di panno, e $\frac{30}{50}$ il rapporto inverso dei giorni di lavoro.

Ciò posto, si potrà, senza scrivere la proporzione, risolvere direttamente i problemi sulla regola del tre semplice, sia diretta sia inversa, col mezzo di questa

Regola. — *Il valore dell'incognita si ottiene moltiplicando il numero omogeneo alla medesima pel rapporto* diretto *degli altri due, quando questi sono direttamente proporzionali alla medesima, e pel loro rapporto* inverso *quando essi sono inversamente proporzionali alla stessa incognita.*

Problemi sulla Regola del tre semplice.

601. Quante oscillazioni farà in 18 minuti e 50 secondi un pendolo che in minuti $4\ ^1/_3$ ne fa 186?

602. In quante ore un vascello percorrerà Cm. 222,22, percorrendone 53,333 in 4 ore e minuti $13\ ^1/_2$?

603. Rivendendo zuccaro a ll. 1,80 il Cg. guadagnai ll. 8 %; quanto mi costava il chilogramma?

604. Tre botti di vino contenenti, la 1ª Dl. 57,50, la 2ª Dl. 61 e la 3ª Dl. 55,50, furono pagate a ll. 99 ogni 27 Dl.; dicasi il costo totale ed il prezzo del litro.

605. Un terreno di Ea. 45,2285 rende annualmente ll. 2578,75, e un altro di Ea. 33,1875 frutta ll. 1978,65; quale dei due rende più e quanto, in ragione dell'estensione?

606. Teotimo vendè a ll. 2,75 il m.q. i $^3/_5$ d'un suo terreno il quale produce 2,50 % del prezzo a cui venne stimato. Dicasi quanti Ea. abbia venduti, sapendo che il terreno restante dà un annuo prodotto di ll. 600.

607. In 14 giorni 12 operai fecero la metà d'un lavoro; in

quanto tempo verrà ultimato, essendo il numero degli operai diminuito di 4?

608. Giulio comprò due pezze di tela, pagando la 1ª ll. 405 e la 2ª ll. 369; qual è la lunghezza dell'una e dell'altra, se la 1ª ha 4 m. più della seconda?

609. Una tromba che dà 3 El. d'acqua all'ora, riempie la vasca sottostante in 15 ore; in quanto tempo la riempirà un'altra gittandovi 5 El. all'ora?

610. Una locomotiva impiega 7 ore, 15 minuti e 56 secondi per recarsi da *A* in *B*, facendo Cm. 48,17 l'ora; in quanto tempo rifarà il tragitto, percorrendo Cm. 54,12 all'ora?

611. Nicomede fa i $^2/_3$ del suo cammino in giorni $3\ ^1/_4$; quanto tempo impiegherà a farne i $^4/_5$?

612. Giusta il disegno, una scala doveva avere 210 scalini alti dm. $1\ ^5/_6$; ma nell'esecuzione furono ridotti a dm. $1\ ^3/_5$. Qual ne sarà il numero?

613. I giorni solari constano di 24 ore, i lunari di 24,50′ ed in $29\ ^1/_2$ de' primi si compie una lunazione; cerchisi quanti giorni lunari essa comprenda.

614. Leonardo lasciò ll. 10800 da spartirsi tra 4 suoi eredi, a patto che quando il 1° abbia $^3/_4$ d'una lira, il 2° ne abbia $^2/_3$, il 3° $^1/_2$, ed il 4° $^1/_3$. Qual sarà la parte di ciascuno?

615. In 27 giorni e $^3/_4$ Silvio fece m. 39,27 di muratura, e Vittore in giorni $35\ ^5/_9$ m. 52,60: quale dei due lavorò più in proporzione del tempo impiegatovi?

616. Quante risme di carta da ll. 3,50, da ll. 4. e da ll. 5,50 potrò io avere con ll. 117, comprandone un ugual numero d'ogni specie?

617. Spartiscasi la somma di ll. 1824 fra tre persone, in modo che la parte della 1ª stia a quella della 2ª :: 7 : 9, e la 1ª alla 3ª :: 3 : 4.

618. La somma di tre numeri è 66, il 1° è quadruplo del 2°, e dividendo la somma dei due primi pel 3°, si ha per quoto 10. Quali sono essi?

619. Si pagano ll. 108,50 per 3720 melarance: quanto farà d'uopo rivender la dozzina per guadagnare 5 % del prezzo di vendita?

620. Ugone con ll. 1300 compra un prato, che poi affitta a ll. 40 l'anno: se egli paga ll. 2,65 d'imposta, dicasi quanto per cento gli frutta annualmente la somma spesa nella compra.

621. La somma di 3 numeri è 14250, il 1° sta al 3° :: 3 : 11 e ne differisce di 600. Quali sono essi?

622. Un terreno rettangolare è lungo m. 12,50 e largo $3\ ^2/_3$; se la larghezza vien diminuita di $^5/_7$ di metro, quanto bisognerà aumentarne la lunghezza, affinchè la superficie non sia alterata?

623. Determinare i 4 termini d'una proporzione *continua* nella quale il prodotto dei medii moltiplicato per quello degli estremi dia 4096; e l'ultimo termine uguagli $^1/_4$ della somma dei medii.

624. Posto che in 50 Cg. d'acqua salsa ne entrino 7 di sale, dicasi quanti Cg. d'acqua dolce converrà aggiungervi affinchè 20 Cg. d'acqua salsa contengano $^2/_3$ di Cg. di sale.

625. Una proprietà di Ea. 16,80 venne divisa in 4 parti: la somma delle due prime sta alla somma delle altre :: 7 : 5 ; il prodotto della 1ª per la 4ª è uguale a quello della 2ª per la 3ª, e la 3ª sta alla 4ª :: 11 : 9. Si domanda ciascuna di queste parti.

§ 4° — REGOLA DEL TRE COMPOSTA.

618. — La **regola del tre composta** è quella con cui si determina il quarto termine d'una proporzione risultante dalla moltiplicazione di più altre.

1° *Esempio.* Se 87 operai mettono 8 giorni a selciare una piazza lunga m. 116 e larga m. 72, quanti giorni impiegheranno 23 operai per acciottolare una via di m. 460 in lunghezza e 15 in larghezza?

Si fa prima la *traduzione* del problema come nella regola del tre semplice, colla differenza che, essendovi più di due specie di quantità, ciascuna linea conterrà più di due numeri.

	operai	lungh.	largh.	giorni
Traduzione	87	116	72	8
	23	460	12	x.

Soluzione (1° Metodo).

87 op. per uno spazio lung. 116, larg. 72 metri 8 giorni.

1 » » 116 » 72 » 87 v. p. = $\frac{8 \times 87}{}$

1 » » 1 » 72 » 116 v. m. = $\frac{8 \times 87}{116}$

1 » » 1 » 1 » 72 v. m. = $\frac{8 \times 87}{116 \times 72}$

23 » » 1 » 1 » 23 v. m. = $\frac{8 \times 87}{116 \times 72 \times 23}$

23 » » 460 » 1 » 460 v. p. = $\frac{8 \times 87 \times 460}{116 \times 72 \times 23}$

23 » » 460 » 12 » 12 v. p. = $\frac{8 \times 87 \times 460 \times 12}{116 \times 72 \times 23} = 20g$

2° *Metodo.* — 1° Supponendo che le dimensioni del 2° selciato siano uguali a quelle del 1°, la questione si ridurrà a questa:

87 operai fanno un lavoro in 8 giorni: in quanto tempo lo faranno 23 operai?

Questo quesito presenta una regola del tre semplice inversa, perchè gli operai sono inversamente proporzionali all'incognita; perciò si ha

$$\left.\begin{matrix} 87 & — & 8 \\ 23 & — & z \end{matrix}\right\} \text{ donde } 23 : 87 :: 8 : z.$$

La z rappresenta i giorni che metteranno 23 operai a fare un selciato lungo m. 116 e largo m. 72.

2° Supponiamo ora che soltanto la larghezza del 2° selciato sia uguale a quella del 1°. La quistione diventa: *Per fare un lavoro di* 116 *metri di lunghezza occorrono* z *giorni; quanti ne abbisogneranno se il lavoro è di m.* 460 ?

$$\left.\begin{matrix} 116 & — & z \\ 460 & — & y \end{matrix}\right\} \text{ donde } 116 : 460 :: z : y.$$

La y rappresenta i giorni che metterebbero 23 operai a fare un selciato lungo m. 460 e largo m. 72.

3° Ammettiamo per ultimo che anche la larghezza del secondo lavoro sia quale vien data dal problema; si avrà: *Per fare un lavoro di* 72 *metri in larghezza occorrono* y *giorni; quanti ne abbisogneranno se il lavoro è largo m.* 12 ?

$$\left.\begin{matrix} 72 & — & y \\ 12 & — & x \end{matrix}\right\} \text{ donde } 72 : 12 :: y : x.$$

La x rappresenta l'incognita del problema, cioè i giorni che mettono 23 operai a fare un selciato lungo m. 460 e largo m. 12. Per ottenere il suo valore converrebbe cercare nella 1ª proporzione quello di z, il quale sostituito nella 2ª farebbe conoscere quello di y, e questo messo nella 3ª darebbe quello di x. Ma riesce assai più breve moltiplicare termine a termine le tre proporzioni, il che dà

$$23 \times 116 \times 72 : 87 \times 460 \times 12 :: 8 \times z \times y : z \times y \times x,$$

quindi (597) $23 \times 116 \times 72 : 87 \times 460 \times 12 :: 8 : x$, donde

$$x = \frac{8 \times 87 \times 460 \times 12}{23 \times 116 \times 72} = 20 \text{ giorni.}$$

619. — Ponendo la precedente espressione sotto questa forma

$$x = 8 \times \frac{460}{116} \times \frac{12}{72} \times \frac{87}{23},$$

e richiamando ciò che dicemmo al n° 617, possiamo dedurne la seguente regola per trovare direttamente il valore dell'incognita nei problemi sulla regola del tre composta.

Regola. — *Scritte sopra due linee orizzontali le quantità date dal problema, in guisa che le omogenee si corrispondano l'una sotto l'altra, il valore dell'incognita si ottiene moltiplicando il numero omogeneo alla medesima pei rapporti diretti dei numeri direttamente proporzionali all'incognita, e pei rap-*

porti inversi dei numeri inversamente proporzionali alla stessa incognita (*).

620. — ***Osservazione.*** Nella prima parte del precedente problema, i numeri 116 e 72, esprimenti le dimensioni della piazza, concorrono a determinare un lavoro fatto, ossia un *effetto* prodotto; mentre i numeri 87 e 8, esprimenti gli uomini ed i giorni, concorrono a determinare la *causa* che produsse tale effetto. Similmente nella seconda parte, i numeri che esprimono le dimensioni della via determinano un *effetto*, e gli altri, fra i quali trovasi l'incognita, determinano la *causa* che lo produsse.

Ora la proporzione $23 \times 116 \times 72 : 87 \times 460 \times 12 :: 8 : x$ testè ottenuta può scriversi (597) così

$$116 \times 72 : 460 \times 12 :: 8 \times 87 : x \times 23;$$

dal che s'inferisce questa semplicissima

Regola. — Per risolvere i problemi sulla regola del tre composta, si scrive la proporzione giusta la seguente formola: *I due prodotti dei numeri costituenti ciascun effetto, sono direttamente proporzionali ai due prodotti costituenti le rispettive cause.*

Questa formola è comodissima in pratica, non solo per la sua brevità, ma specialmente perchè con essa scompare ogni distinzione di rapporto diretto od inverso. La proporzione precedente dà

$$x = \frac{460 \times 12 \times 8 \times 87}{116 \times 72 \times 23} = 20 \text{ giorni.}$$

Aggiungeremo qui altri due esempi ai quali applicheremo entrambe le precedenti regole.

2° *Esempio.* Lavorando 12 ore il dì, 600 uomini impiegarono 50 giorni a scavare un canale lungo m. 2000, largo 6 e profondo 3; in quanti giorni 800 uomini lavorando 10 ore il dì scaveranno un altro canale lungo m. 2800, largo 9 e profondo 5, in un terreno 4 volte più difficile del primo?

	uomini	giorni	ore	lungh.	larg.	prof.	diff.
Traduzione	600	50	12	2000	6	3	1
	800	x	10	2800	9	5	4.

Dalla 1ª regola (619) si ha

$$x = 50 \times \frac{600}{800} \times \frac{12}{10} \times \frac{2800}{2000} \times \frac{9}{6} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{1}$$

$$= \frac{50 \times 600 \times 12 \times 2800 \times 9 \times 5 \times 4}{800 \times 10 \times 2000 \times 6 \times 3} = 630.$$

(*) Questa regola basterebbe da sè sola alla risoluzione di tutti i problemi sulla regola del tre, semplice e composta, diretta ed inversa; giacchè essa comprende quella del n° 617, la quale n'è soltanto un caso particolare.

Dalla 2ª regola (620) si deduce
$2000\times6\times3\times1 : 2800\times9\times5\times4 :: 600\times12\times50 : 800\times10\times x$, donde

$$x = \frac{2800\times9\times5\times4\times600\times12\times50}{2000\times6\times3\times1\times800\times10} = 630.$$

3° *Esempio.* Una fortezza è custodita da 3000 soldati e provveduta di viveri per 9 mesi, dando a ciascuno 18 once di panè il dì. A quanto dovrassi ridurre la razione, perchè i viveri durino 12 mesi, aumentando di 500 il presidio ?

Giusta la 1ª regola, si ha $x = 18 \times \frac{9}{12} \times \frac{3000}{3500} =$ once $11\ ^4/_7$.

Per far uso della 2ª regola in questo problema, bisogna osservare che l'effetto viene espresso dalla consumazione totale dei viveri, i quali, rimanendo i medesimi in ambidue i casi, rappresenteremo coll'unità: tutte le altre quantità concorrono a costituire le cause. Si avrà dunque

$3000\times9\times18 : 1 :: 3500\times12\times x : 1$, donde

$$x = \frac{3000\times9\times18\times1}{3500\times12\times1} = \text{once } 11\ ^4/_7.$$

Problemi sulla Regola del tre composta.

626. Posto che 15 persone guadagnino ll. 600 in 20 dì, quanto guadagnerebbero 35 in 140 giorni ?

627. Per fare 150 metri d'un certo lavoro furono impiegati per 12 giorni 5 uomini che lavoravano 12 ore il dì ; quante ore il dì dovranno lavorare 30 uomini per fare in 20 giorni 500 metri dello stesso lavoro?

628. Dodici casse di mercanzia pesanti ciascuna Cg. 200, costarono ll. 5088, e 53 casse della stessa merce si pagarono lire 288. Quanto pesava ognuna di queste ultime?

629. Con 75 Cg. di filo, Lucino fece 418 m. di tela larga $^{15}/_{16}$; quanti Cg. gliene abbisogneranno per tesserne m. 268 della stessa qualità, ma larga solo $^7/_8$?

630. Si pagarono ll. 165 pel lavoro fatto in 15 giorni da 4 cavalli ciascuno della forza di 140 Cg.; quanto converrà pagare per 21 giornata di 5 cavalli colla forza di 124 Cg. ciascuno ?

631. All'estremità d'un muro lavorano 4 muratori, all'altra 7; se i primi ne costrussero 40 m. in 8 giorni lavorando 9 ore il dì, quanti metri ne faranno gli altri in 9 giornate di 8 ore ?

632. In una fortezza custodita da 1500 uomini si hanno 7600 El. di frumento, i quali debbono durare mesi $6\ ^1/_2$. Aumentandosi il presidio di 500 ed il grano di El. 3500, per quanto tempo basterà la provvigione ?

633. Ventotto metri di tela larga $^{6}/_{7}$, più 25 m. larga $^{7}/_{8}$, furono tessuti in 12 giorni da 14 persone che vi lavoravano 9 ore il dì. Quante se ne richiederebbero per eseguire detto lavoro in 16 giorni di 7 ore?

634. Due artisti guadagnarono insieme ll. 660; il 1° fece 50 giornate di 9 ore l'una, e ricevette ll. 247,50. Quante giornate di 12 ore dovette fare il 2° per avere il restante?

635. Con ll. 720 comprai 30 m. di panno largo $^{9}/_{12}$; quanto dovrò pagare per 50 m. d'altro panno largo $^{8}/_{12}$, il quale a pari dimensioni vale $^{15}/_{16}$ del primo?

636. Due qualità di nastro stanno :: 6 : 5, e della prima n'ebbero 5 pezze di m. 21,444 l'una per ll. 4824,90; quanto spenderassi per 12 pezze di m. 25,40 della seconda qualità?

637. Sette casse di cocciniglia pesanti 80 Cg. l'una, costarono ll. 6720, e 16 casse d'indaco ll. 17280; cerchisi quanto pesi una di queste, sapendo che i prezzi della 1ª e della 2ª merce stanno :: 4 : 5.

638. Posto che un viaggiatore aumenti la celerità sua di $^{2}/_{5}$, quante ore dev'egli camminare ogni dì per rifare in 5 giorni il tragitto percorso in 7 giornate di 9 ore?

639. Due cavalli pagati in ragione diretta delle forze ed inversa delle età, hanno l'uno 5 anni e 8 mesi, l'altro 7 anni e 3 mesi; la forza del 1° sta a quella del 2° :: 3 : 4 $^{1}/_{2}$. Se questo venne pagato ll. 540, quanto costò l'altro?

640. Le stanze d'un edifizio stanno a quelle d'un altro, per la lunghezza :: $^{5}/_{6}$: $^{7}/_{8}$, per la larghezza :: $^{4}/_{7}$: $^{5}/_{9}$, e 5 delle prime si tappezzarono con 70 rotoli di carta lunghi m. 8,24, larghi m. 0,48. Quanti rotoli di m. 10,40 su 0,55 occorreranno per 7 stanze del 2° edifizio?

641. L'altezza del monte Avellino negli Apennini è circa $^{1}/_{2}$ di quella del monte Bianco; i $^{2}/_{5}$ dell'altezza del monte Bianco danno quella del monte Ventoso, la quale uguaglia i $^{5}/_{7}$ di quella del monte Rotondo in Corsica. Ora, quest'ultima essendo metri 2672, cerchisi quella dell'Avellino.

642. Chilogrammi 9 di caffè valgono quanto 19 di zucchero, e 5 di zucchero quanto 3 di cioccolate; se questo vale 3 ll. il Cg., qual sarà il prezzo del chilogramma di caffè?

643. Comprai seggiole a quattro differenti prezzi; 5 del 1° valgono quanto 12 del 2°; 5 del 3° quanto 16 del 2°; e 20 del 4° quanto 9 del 3°. Qual è il 1° prezzo, se il 4° è ll. 36?

644. In 15 giorni 30 copisti, lavorando 8 ore il dì, trascrissero 40 volumi di 100 pagine ciascuno; quanti ne dovrò io impiegare acciocchè, lavoraudo 9 ore il dì, mi trascrivano 24 volumi di 180 pagine in 12 giorni?

645. La durezza d'un terreno sta a quella d'un altro di uguale estensione :: 6 : 7, e 4 paia di buoi arano il 1° in giorni 5 $^{1}/_{4}$. In quanto tempo si arerà il 2° impiegandovene 3 paia, la cui forza sta a quella dei primi :: 8 : 9?

646. Si domanda il rapporto tra le forze di due operai, posto

che lavorando sopra terreni le cui difficoltà stanno :: 3 : 4, il 1° faccia m. 720 in 36 ore, ed il 2° m. 504 in 24 ore.

647. Sopra una merce comprata e rivenduta successivamente da quattro negozianti, i due primi ebbero 10 % di guadagno, e gli altri 10 % di perdita. Trovisi quanto l'abbia pagata il 1°, sapendo che il 4° la cedè per ll. 2450,25.

648. In due vasche le cui capacità stanno :: 25 : 15, l'acqua entra con pressioni proporzionali a 5 e 8. Ora, l'acqua emessa da due tubi, stando in ragione delle pressioni e de' quadrati dei diametri, chiedesi qual debba essere il diametro di 9 cannelle perchè riempiano la 1ª vasca nello stesso tempo che la 2ª vien riempita da 6 cannelle di 3 cm. di diametro.

§ 5° — INTERESSE SEMPLICE.

621. — Chiamasi **interesse, frutto** o **rendita,** il profitto che si ritrae da una somma data in prestito.

La somma imprestata chiamasi **capitale.**

L'interesse dipende dal capitale, dal tempo ch'esso rimane a frutto, e da un terzo elemento chiamato *tassa* dell'interesse.

622. — Si chiama **tassa** l'interesse convenuto per una somma di 100 ll. imprestate per un anno.

La tassa s'indica così: 4 %, 5 %, 6%,.... che si legge: *quattro per cento, cinque per cento,...* (*).

623. — Vi sono due sorta d'interessi; il *semplice* ed il *composto*.

L' **interesse semplice** è quello che è dovuto ciascun anno senza mai unirsi al capitale, e che per conseguenza non può mai dare altro interesse, quantunque non venga pagato al termine di ciascun anno.

1° *Esempio.* Qual è l'interesse annuo di 6000 ll. al 5 %?

Traduzione $\begin{cases} 100 \text{ ——— } 5 \\ 6000 \text{ ——— } x \end{cases}$

(*) La legge in vigore per la tassa d'interesse è quella del 5 giugno 1865 così espressa:

« L'interesse è legale o convenzionale.

« L'interesse legale rimane determinato nel 5 % in materia civile e nel 6 % in materia commerciale e si applica nei casi in cui l'interesse sia dovuto, o manchi una convenzione che ne stabilisca la misura.

« L'interesse convenzionale è stabilito a volontà dai contraenti. Nelle materie civili l'interesse convenzionale deve risultare da atto scritto, sotto pena di nullità. »

Soluzione.

1° *Metodo.* Se 100 lire producono 5 lire d'interesse

1 lira produce 100 volte meno, ovv. $\frac{5}{100}$

e 6000 ll. prod. 6000 volte più, ossia $\frac{5\times 6000}{100} = 300$ ll. *R.*

2° *Metodo.* Se 100 lire producono 5 lire d'interesse, una somma 5, 6,. . . volte più grande frutterà 5, 6,. . . volte di più, dunque

$100 : 6000 :: 5 : x$, donde $x = \frac{6000\times 5}{100} = 300$ ll. *R.*

624. — Se rappresentiamo il capitale con c, la tassa con i, il tempo con t, e la rendita con r; la *traduzione* di qualsivoglia problema sull'interesse sarà

$$\begin{array}{ccccc} 100 & \text{———} & 1 & \text{———} & i \\ c & \text{———} & t & \text{———} & r \end{array}$$

e chiamando x l'interesse di c durante un anno si avrà

$$100 : i :: c : x.$$

La rendita di c durante t anni sarà data dal 4° termine di questa proporzione $1 : t :: x : r$.

Moltiplicando le due proporzioni per ordine si avrà

$$(\alpha) \qquad 100 : it. :: c : r.$$

La qual cosa fa vedere che *nell'interesse semplice, 100 sta alla tassa moltiplicata pel tempo, come il capitale sta alla rendita.* Coll'aiuto della qual formola si possono risolvere tutti i problemi sull'interesse semplice.

625. — Dalla proporzione (α) si ricavano le formole seguenti:

$$(1) \ . \ . \ . \ r = \frac{cit}{100} \qquad (3) \ . \ . \ t = \frac{100 \times r}{c\times i}$$

$$(2) \ . \ . \ . \ i = \frac{100 \times r}{c\times t} \qquad (4) \ . \ . \ c = \frac{100 \times r}{i\times t}.$$

La 1ª di queste formole dà direttamente la rendita d'una somma, la 2ª la tassa, la 3ª il tempo, e la 4ª il capitale.

2° *Esempio.* Qual è il capitale che mutuato al $4\,^1/_2\,\%$ fruttò ll. 4500 in 10 anni?

Applicando a questo problema la formola (4), si ha

$$x = \frac{100\times 4500}{4,5\times 10} = \text{ll. } 10000.$$

3° *Esempio.* A qual tassa furono poste ll. 25000, se dopo 8 anni il mutuante percepì ll. 37000 tra capitale ed interessi?

La rendita è 37000—25000=ll.12000; quindi la formola (2) dà

$$x = \frac{100 \times 12000}{25000\times 8} = 6\ \%.$$

626. — ***Osservazione.*** Quando cogli anni vi sono mesi o giorni, si riducono in frazioni d'anno.

Così, se si volesse calcolare l'interesse di 2000 ll. al 6 % durante 2 anni 4 mesi 9 giorni, basterebbe sostituire a t nella formola $r = \frac{cit.}{100}$ la frazione d'anno $^{861}/_{365}$; il che darebbe

$$r = \frac{2000 \times 6 \times 861}{100 \times 365} = \text{ll. } 283{,}07. \ R.$$

Metodi abbreviativi

impiegati nel commercio per calcolare gl' Interessi.

627. — Occorrendo sovente di calcolare l'interesse d'una somma per alcuni giorni, daremo qui un cenno di due metodi usati dai commercianti in tali calcoli.

I commercianti calcolano l'anno di 360 giorni ed il mese di 30.

Ripigliamo la formola $r = \frac{cit.}{100}$. Rappresentando con n il numero de'giorni compresi in t anni, si avrà $n = t \times 360$, donde $t = \frac{n}{360}$. Ponendo ora questo valore invece di t nella formola antecedente, risulta

$$(1) \quad r = \frac{cin}{36000};$$

da cui ricavasi che:

Per trovare l'interesse d'un capitale impiegato per un dato numero di giorni, bisogna moltiplicarlo per la tassa e pei giorni dati, poscia dividere il prodotto per 36000.

628. — ***Metodo dei divisori fissi.*** Se nella formola (1) si fa $i = 6, 5, 4...$ essa diventa

$$(2) \quad r = \frac{cn}{6000}, \ r = \frac{cn}{7200}, \ r = \frac{cn}{9000}, \ldots$$

I numeri 6000, 7200, 9000, ecc., ottenuti dividendo 36000 per le tasse 6, 5, 4, ecc... diconsi in commercio *divisori fissi*. Dunque:

Il **divisore fisso** è il quoziente di 36000 diviso per la tassa dell'interesse.

Dicesi poi **numero** il prodotto del capitale pel numero dei giorni.

Ora, chiamando D il *divisore fisso* corrispondente a qualsivoglia tassa, e N il *numero*, le formole (2) si ridurranno a

$$(3) \quad r = \frac{N}{D}; \text{ dunque:}$$

La rendita d'un capitale lasciato ad interesse a qualsivoglia tassa durante un dato numero di giorni, si ottiene dividendo il numero *pel* divisore fisso *corrispondente a questa tassa.*

Questo modo di calcolare la rendita dicesi *metodo dei divisori fissi*. Per farne uso bisogna aver presente la seguente

Tavola dei Divisori fissi corrispondenti alle tasse più usuali.

TASSA per 0/0	DIVISORI FISSI	TASSA per 0/0	DIVISORI FISSI	TASSA per 0/0	DIVISORI FISSI
1	36000	4 1/2	8000	7 1/2	4800
1 1/2	24000	5	7200	8	4500
2	18000	5 1/2	6545 5/11	8 1/2	4235 5/17
3	12000	6	6000	9	4000
3 1/2	10285 5/7	6 1/2	5538 6/13	9 1/2	3789 9/19
4	9000	7	5142 6/7	10	3600

Esempio. Qual rendita produce il capitale 2400 lire durante 175 giorni a ciascuna delle tasse 6; 5; 4 1/2?

$N = c \times n =$ 2400 × 175 = 420000 = (*numero*)
$r = N : D =$ 420000 : 6000 = ll. 70 per la tassa al 6 0/0.
» » = 420000 : 7200 = » 58,33 » al 5 0/0.
» » = 420000 : 8000 = » 52,50 » al 4 1/2 0/0.

629. — ***Metodo delle parti aliquote.*** Ripigliamo la formola (3) $r = \frac{N}{D}$ del n° precedente, nella quale r esprime la rendita, N il prodotto del capitale c pel numero n de' giorni, e D il quoto di 36000 per la tassa i. Ponendo in questa formola invece di N il suo valore cn, essa diventa $r = \frac{cn}{D}$ da cui si deduce $n = \frac{rd}{c}$. In questa nuova formola n darebbe il numero dei giorni richiesti affinchè il capitale c collocato a qualsivoglia tassa produca la rendita r. Ora, supponiamo che la rendita sia la centesima parte del capitale, cioè $\frac{c}{100}$; il valore di n sarà $n = \frac{cD}{c \times 100}$, ossia $n = \frac{D}{100}$; dunque:

Il numero dei giorni richiesti perchè un capitale produca una rendita uguale alla centesima parte di se stesso, si ottiene col dividere per 100 il divisore fisso.

Questo numero di giorni si chiama *base*, perchè sovra esso poggia il metodo che siamo per esporre. Dunque:

La **base** del metodo delle parti aliquote è uguale alla centesima parte del divisore fisso.

Essa varia pertanto col variare di questo, e la tavola dei divisori fissi corrispondenti a ciascuna tassa, fornisce altresì le basi relative alle tasse medesime.

630. — Ciò posto, ecco il metodo delle *parti aliquote:*

Si divide per 100 il capitale, il che dà la rendita ch'esso produce durante i giorni indicati dalla base; quindi si scompone il numero dato di giorni in parti che siano multipli o sottomultipli della base, in modo che le rendite parziali, prodotte durante le rispettive parti, si possano dedurre facilmente l'una dall'altra moltiplicando o dividendo la precedente per piccoli numeri. La somma delle rendite parziali sarà la rendita cercata.

Esempio. Qual rendita produce il capitale di lire 2400 durante 175 giorni alle tasse 6; 5; 4 $^1/_2$?

1° *al 6* $^0/_0$. La base è 6000 : 100, ossia 60; e il numero dato di giorni può scomporsi così: 175 = 120 + 40 + 10 + 5.

Ora l'interesse per 60 giorni essendo la centesima parte del capitale, si avrà da prima per questi 60 giorni . . . ll. 24.

Quindi si trova successivamente:

Per	120	giorni,	il doppio del numero prec., ossia .	ll.	48
»	40	»	il $^1/_3$ » .	»	16
»	10	»	il $^1/_4$ » .	»	4
»	5	»	il $^1/_2$ » .	»	2
»	175	»	la somma delle rendite parz., ossia...	ll.	70.

2° *al 5* $^0/_0$. La base è 7200 : 100, cioè 72; il numero dato di giorni si può scomporre così: 175=144+24+6+1.

L'interesse per 72 giorni è 2400 : 100, ossia . ll. 24

Quindi si ottiene:

Per	144	giorni,	il doppio del numero prec., ossia	ll.	48
»	24	»	il $^1/_6$ »	»	8
»	6	»	il $^1/_4$ »	»	2
»	1	»	il $^1/_6$ »	»	0, 33.
»	175	»	la somma de' numeri precedenti, cioè	ll.	58, 33.

3° *al 4 1/2* $^0/_0$. Base 8000 : 100 = 80; giorni 175 = 80 + 20 + 60 + 15.

Per	80	giorni,	la rendita è 2400 : 100, ossia .	ll.	24
»	20	»	» il $^1/_4$ del num. preced., ossia	»	6
»	60	»	» il triplo »	»	18
»	15	»	» il $^1/_4$ »	»	4, 50.
»	175	»	la somma dei numeri prec., cioè .	ll.	52, 50.

Tutti questi risultati sono identici a quelli già ottenuti col metodo dei divisori fissi.

Problemi sull'Interesse semplice.

649. Areta vende m. 459 di panno a ll. 8,40 il m., e impiega la somma ricavata al 5 %; qual rendita perciperà annualmente?

650. Quali saranno gl'interessi di ll. 60000 al 4 ½ % in capo a 25 anni e ¼?

651. In quanto tempo ll. 305534,40 poste al 5 % produrranno ll. 45830,16 di rendita?

652. A quanto per cento converrà impiegare ll. 25648 per riscuotere ll. 1795,36 all'anno?

653. Si domanda a quanto monterà, tra capitale ed interessi, in capo a 6 anni la somma di ll. 2500 imprestata al 9 %.

654. Anania avendo tolto in prestito ll. 950 al 6 %, restituì poi al mutuante ll. 1230; quanto tempo tenne egli tale somma?

655. Egidio collocò ll. 56458,56 al 5 ½ %, ll. 30648,56 all'8 ⅖ %, e comprò un podere di ll. 36450 che produce 4 ⅓ %. Qual è l'annua entrata?

656. Se ll. 7400 ne produssero 832,50 in 27 mesi, dicasi quanto produrrebbero in 45 mesi, ed a qual tassa furono collocate.

657. Al 17 maggio 1867 *B* riscosse ll. 394,33 per rendita al 6 % di 8450 ll.; da quall'epoca si erano computati gl'interessi?

658. Mimo pose a frutto il 17 ottobre 1866 una certa somma al 5 %, ed il 30 novembre 1867 incassò ll. 3600 tra capitale ed interesse. Qual fu la somma imprestata?

659. L'annua rendita di ll. 20000 è inferiore di ll. 800 a quella prodotta da ll. 30000 impiegate al 6 %. A qual tassa venne posta la 1ª somma?

660. Balbiano essendo debitore di ll. 11645,26, colloca al 7 % una somma tale, che cedendone ogni anno i frutti al creditore, in capo a 6 anni questi gli deve restituire ll. 354,74. Qual è detta somma?

661. Una casa produce ll. 2358 di fitto; quanto debbo pagarla perchè il mio danaro frutti il 4 ½ %?

662. Qual è la somma dalla quale togliendo ll. 0,04 per lira rimangono ll. 2356,80?

663. Se 1200 lire ne fruttarono 430 in 3 anni e 7 mesi, a qual parte del capitale si riferiscono ll. 5 di rendita annua?

664. Qual è il capitale che impiegato al 4 % fruttò 6000 lire in 4 anni, 7 mesi e 18 giorni?

665. Sono ora 5 anni, 10 mesi e 15 giorni che posi a frutto ll. 45000, e posso riscuotere, tra capitale ed interesse, ll. 76106,25. A qual tassa impiegai il capitale?

666. A qual tassa bisogna collocare ll. 30000 perchè fruttino ll. 3375 in 27 mesi?

667. Sul provento di 15 mesi d'un podere che fruttò 3 $^3/_4$ %, il proprietario pagò un'imposta di cent. 31 $^1/_4$ per lira. Dicasi quanto ebbe di benefizio netto, se il podere vale ll. 45600.

668. Delle due somme ll. 15600 e ll. 18000 impiegate alla medesima tassa, la 2ª frutta annualmente ll. 144 più della 1ª; qual è questa tassa?

669. Tre artigiani posero a frutto una somma totale di ll. 1200, e dopo 8 anni riscossero, tra capitale ed interessi, il 1° ll. 792, il 2° ll. 528, ed il 3° ll. 264. Chiedesi: 1° la tassa, 2° la posta ed il guadagno di ciascuno.

670. Due benestanti posseggono ciascuno ll. 15000: il 1° impiega tutto il suo al 5 %, il 2° colloca 8000 ll. al 4 % e 7000 al 7. Quale dei due ritrarrà maggior frutto?

671. La somma di ll. 83980 mutuata parte al 4 $^1/_2$ % e parte al 5 %, produce annualmente ll. 3959. Si domanda il montare di ciascuna parte.

672. Chiedesi in quanto tempo un capitale verrà raddoppiato, mutuandolo ad una qualsiasi delle tasse 3; 4; 4 $^1/_2$; 5; 5 $^1/_2$, e 6 per *cento*.

Da risolversi coi metodi abbreviativi.

673. Determinare l'interesse di ll. 6500 per 78 giorni al 5 %.

674. Trovare l'interesse di ll. 5468,33, per 53 giorni a $^5/_8$ % il mese.

675. Santorino prestò più somme al 5 %, cioè ll. 1800 per 140 giorni, ll. 750 per 32, ll. 1845 per 20, ll. 345 per 50 e ll. 2000 per tre mesi; quanto interesse ricaverà egli?

676. Un banchiere fece ad una casa di commercio i prestiti seguenti:

al 24	dicembre	1866	prestò 1500	lire
al 17	febbraio	1867	» 4700	»
al 13	marzo	»	» 600	»
ed al 26	luglio	»	» 2000	»;

domandansi gl'interessi che tale casa deve al banchiere il 30 agosto 1867, la tassa essendo al 6 %.

677. Lando, il 7 ottobre, pose a frutto ll. 3784,70 al 6 %; a quanto monterà l'interesse il 4 aprile seguente?

678. Alberto prende, il 30 maggio, all'interesse dell'8 % la somma di ll. 2000; quanto gli toccherà rendere il 2 agosto dell'anno seguente?

§ 6° — INTERESSE COMPOSTO.

631. — L'**interesse composto** è quello che viene aggiunto al capitale in fine di ciascun anno o ciascun

semestre, perchè anch'esso produca interesse nell'anno, o nel semestre seguente (*).

Il modo più semplice, sebben lungo, che si possa tenere per eseguire questa sorta di calcoli, è quello di cercare da prima lo interesse di un anno ed aggiungerlo al capitale per quindi cercare l'interesse del 2° anno, ridurre a capitale poscia ancora lo interesse di questo 2° anno per trovare quello del 3°, e così di seguito per qualsivoglia numero d'anni.

Esempio. Qual è l'interesse composto di 6000 lire al 5 % durante 3 anni?

$100 : 5 :: 6000 : x = 300$ = interesse del 1° anno
$100 : 5 :: 6300 : x = 315$ = » » 2° »
$100 : 5 :: 6615 : x = 330{,}75$ = » » 3° »

donde ll. $\overline{945{,}75}$ = » pei 3 anni;

quindi $6000 + 945{,}75 =$ ll. 6945,75 tra capitale ed interesse.

632. — Invece di cercare l'interesse di ciascun anno, si potrebbe direttamente trovare il **capitale definitivo,** cioè il capitale coi suoi interessi composti, mediante la seguente proporzione: 100 *elevato alla potenza indicata dal numero degli anni, sta a* 100 + *la tassa elevata alla medesima potenza, come il capitale sta al capitale col suo interesse composto.*

In fatti si ha (624) $100 : i :: c : r$, in cui c rappresenta il capitale, i la tassa e r la rendita di un anno. Ora, da questa proporzione si deduce (602) $100 : 100 + i :: c : c + r$. Rappresentando pertanto con n il numero degli anni, e con x, y, z,..... i capitali definitivi $c + r$ del 1°, 2°, 3°,..... anno, si avranno le n seguenti proporzioni:

$100 : 100 + i :: c : x =$ capitale definitivo del 1° anno
$100 : 100 + i :: y : y =$ » » 2° anno
$100 : 100 + i :: x : z =$ » » 3° anno
. . . . . .
$100 : 100 + i :: V : X =$ » » n^{esimo} anno.

Moltiplicando queste n proporzioni termine a termine, e sopprimendo i fattori x, y, z,... V, comuni ai due termini del secondo rapporto risulta

$$(\alpha)\ 100^n : (100 + i)^n :: c : X.$$

Applicando questa formola all'esempio precedente si avrebbe:

$$100^3 : 105^3 :: 6000 : X = 6945{,}75.$$

(*) La più utile applicazione dell'interesse composto sono le così dette *casse di risparmio*, le quali hanno per iscopo di ricevere i piccoli risparmi degli operai, dei domestici, ecc., per farli fruttare. Vi si ricevono anche le più piccole somme, purchè non inferiori ad 1 lira.

In queste casse non solo si assicurano i risparmi d'ogni mese, d'ogni settimana, ma si veggono produrre una rendita, la quale, unita colla somma depositata, frutta considerevoli capitali e sicuri sussidi nel dì del bisogno.

663. — ***Osservazione.*** Se il capitale rimanesse impiegato per un numero d'anni più una frazione d'anno, si calcolerebbe da prima il capitale definitivo pel numero degli anni poi gli si aggiungerebbero gl'interessi semplici che esso produce durante la frazione d'anno.

634. — ***Formazione d'una tavola per calcolare gl'interessi composti.*** Come già si disse, il primo modo (631) di calcolare gl'interessi composti è soverchiamente lungo; nè più comoda riesce la proporzione (α), stante i numeri stragrandi a cui ben presto conduce l'innalzamento alle potenze. Tuttavia da essa trarremo un singolarissimo vantaggio; ed è la formazione d'una tavola, mediante la quale si otterrà, con una semplice moltiplicazione, l'ammontare d'un capitale coi suoi interessi composti in capo a qualsivoglia numero d'anni.

Nella proporzione (α) X rappresenta il capitale definitivo; chiamando C, la proporzione diventa

$$100^n : (100 + i)^n :: c : C,$$

e se ne deduce

$$C = \frac{c(100 + i)^n}{100^n} = c\left(\frac{100 + i}{100}\right)^n = c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n.$$

Poichè i rappresenta la tassa per cento lire $\frac{i}{100}$ rappresenterà la tassa per *una* lira: chiamando r questa tassa, si avrà la formola

$$(1) \qquad C = c(1 + r)^n.$$

Se il capitale imprestato fosse una 1 lira, si avrebbe $c=1$, e quindi

$$(2) \qquad C = (1 + r)^n;$$

onde si scorge che:

Il capitale definitivo risultante da 1 lira messa ad interesse composto durante qualsivoglia numero d'anni, si ottiene aggiungendo ad 1 lira l'interesse annuo di essa ed elevando la somma alla potenza indicata dal numero degli anni.

Se per esempio la tassa per 100 è 5, la tassa per 1, ossia il valore di r sarà 0,05, e si avrà $1 + r = 1{,}05$. Quindi, una lira collocata ad interesse composto 5 % ascende:

in capo ad	1	anno a	$(1{,}05)^1 =$	1,05
»	2	»	$(1{,}05)^2 =$	1,1025
»	3	»	$(1{,}05)^3 =$	1,157625
»	4	»	$(1{,}05)^4 =$	1,215506.

Continuando così a calcolare i capitali definitivi di 1 lira al 5 % per qualunque numero d'anni fino a 50, poi facendo lo stesso per le tasse 3, 4, 4 ½, 5 ½ e 6 si avrà la Tavola seguente, la quale per conseguenza contiene tutti i valori dell'espressione $(1+r)^n$, corrispondenti a $r = 0{,}03$; 0,04; 0,045; 0,05; 0,055; 0,06, e $n = 1, 2, 3\ 4 \ldots\ldots 50$.

N° I. — **Tavola dei Capitali definitivi** risultanti da 1 lira impiegata ad interesse composto.

Anni	3 %	4 %	4,50 %	5 %	5,50 %	6 %
1	1,0300000	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0550000	1,0600000
2	1,0609000	1,0816000	1,0920250	1,1025000	1,1130250	1,1236000
3	1,0927270	1,1248640	1,1411661	1,1576250	1,1742414	1,1910160
4	1,1255088	1,1698586	1,1925186	1,2155063	1 2388247	1,2624770
5	1,1592741	1,2166529	1,2461819	1,2762816	1,3069600	1,3382256
6	1,1940523	1,2653190	1,3022601	1,3400956	1,3788428	1,4185191
7	1,2298739	1,3159318	1,3608618	1,4071004	1,4546792	1,5036303
8	1,2667701	1,3685691	1,4221006	1,4774554	1,5346865	1,5938481
9	1,3047732	1,4233118	1,4860951	1,5513282	1,6190943	1,6894790
10	1,3439164	1,4802443	1,5529694	1,6288946	1,7081445	1,7908477
11	1,3842339	1,5394541	1,6228530	1,7103394	1,8020924	1,8982986
12	1,4257609	1,6010322	1,6958814	1,7958563	1,9012075	2,0121965
13	1,4685337	1,6650735	1,7721961	1,8856491	2,0057739	2,1329283
14	1,5125897	1,7316764	1,8519449	1,9799316	2,1160915	2,2609040
15	1,5579674	1,8009435	1,9352824	2,0789282	2,2324765	2,3965582
16	1,6047064	1,8729813	2,0223701	2,1828746	2,3552627	2,5403517
17	1,6528476	1,9479005	2,1133768	2,2920183	2,4848022	2,6927728
18	1,7024331	2,0258165	2,2084788	2,4066192	2,6214663	2,8543392
19	1,7535061	2,1068492	2,3078603	2,5269502	2,7656469	3,0255995
20	1,8061112	2,1911231	2,4117140	2,6532977	2,9177575	3,2071355
21	1,8602946	2,2787681	2,5202412	2,7859626	3,0782341	3,3995636
22	1,9161034	2,3699188	2,6336520	2,9252607	3,2475370	3,6035374
23	1,9735865	2,4647155	2,7521663	3,0715238	3,4261516	3,8197497
24	2,0327941	2,5633042	2,8760138	3,2250999	3,6145899	4,0489346
25	2,0937779	2,6658363	3,0054345	3,3863549	3,8133923	4,2918707
26	2,1565913	2,7724698	3,1406790	3,5556727	4,0231289	4,5493830
27	2,2212890	2,8833686	3,2820096	3,7334563	4,2444010	4 8223459
28	2,2879277	2,9987033	3,4297000	3,9201291	4,4778431	5,1116867
29	2,3565655	3,1186515	3,5840365	4,1161356	4,7241244	5,4183879
30	2,4272625	3,2433975	3,7453181	4,3219424	4,9839513	5,7434912
31	2,5000804	3,3731334	3,9138574	4,5330395	5,2580686	6,0881006
32	2,5750828	3,5080588	4,0899810	4,7649415	5,5472624	6,4533867
33	2,6523352	3,6483811	4,2740302	5,0031885	5,8523618	6,8405899
34	2,7319053	3,7943163	4,4663615	5,2533480	6,1742417	7,2510253
35	2,8138625	3,9460890	4,6673478	5,5160154	6,5138250	7,6860868
36	2,8982783	4,1039325	4,8773785	5,7918161	6,8720854	8,1472520
37	2,9852267	4,2680899	5,0968605	6,0814069	7,2500501	8,6360871
38	3,0747835	4,4388135	5,3262192	6,3854773	7,6488028	9,1542523
39	3,1670270	4,6163660	5,5658991	6,7047511	8,0694870	9,7035075
40	3,2620378	4,8010206	5,8163645	7,0399887	8,5133088	10,2857179
41	3,3598989	4,9930615	6,0781009	7,3919882	8,9815408	10,9028610
42	3,4606959	5,1927839	6,3516155	7,7615876	9,4755255	11,5570327
43	3,5645168	5,4004953	6,6374382	8,1496669	9,9966794	12,2504546
44	3,6714523	5,6165151	6,9361229	8,5571503	10,5464968	12,9854819
45	3,7815958	5,8411757	7,2482484	8,9850078	11,1265541	13,7646108
46	3,8950437	6,0748227	7,5744196	8,4342582	11,7385146	14,5904875
47	4,0118950	6,3178156	7,9152685	9,9059711	12,3841329	15,4659167
48	4,1322519	6,5705282	8,2714556	10,4012697	13,0652602	16,3938717
49	4,2562194	6,8333494	8,6436711	10,9213331	13,7838495	17,3775040
50	4,3839060	7,1066834	9,0326363	11,4673998	14,5419612	18,4201543

635. — ***Uso della Tavola precedente.*** Rappresentando con N, uno qualsiasi dei numeri $(1+n)^n$ della Tavola, ossia il capitale definitivo d'una lira, la formola (1) dà queste tre:

$$(\alpha)\quad C = c\,N_1, \qquad (\beta)\quad c = \frac{C}{N_1}, \qquad (\gamma)\quad N_1 = \frac{C}{c},$$

colle quali si possono risolvere tutti i problemi relativi all'interesse composto, purchè non escano dai limiti della Tavola, cioè che r ed n non abbiano valori diversi da quelli testè noverati.

La prima di queste formole dà il capitale definitivo, la seconda il capitale imprestato, la terza gli anni e la tassa; le quali cose si ottengono operando giusta le seguenti

Regole. — **1ª** *Per trovare il capitale definitivo si cerca nella Tavola il capitale definitivo d'una lira corrispondente alla tassa ed al numero degli anni dati dal problema, e lo si moltiplica pel capitale imprestato* (α).

2ª *Per trovare il capitale imprestato, si divide il capitale definitivo dato dal problema pel capitale definitivo di una lira, corrispondente alla medesima tassa ed allo stesso numero d'anni* (β).

3ª *Per avere il numero degli anni si divide il capitale definitivo pel capitale imprestato, il che dà il numero* N_1 (γ), *ossia il capitale definitivo d'una lira; si cerca se il quoto ottenuto trovasi nella colonna della Tavola corrispondente alla tassa data: in tal caso, gli anni richiesti si trovano sulla stessa linea orizzontale* (*).

4ª *Per trovare la tassa si divide il capitale definitivo pel capitale imprestato, il che dà il numero* N_1 (γ) *ossia il capitale definitivo d'una lira; si cerca se il quoto ottenuto trovasi nella linea orizzontale cominciante dal numero degli anni dati dal problema: in tal caso la tassa richiesta si trova in cima della stessa colonna.*

Esempio. Si vuole che la somma di lire 5000 ammonti in 50 anni, tra capitale ed interesse composto, a ll. 92100,80: a quanto per 100 conviene impiegarla?

Si ha $c=5000$, $C=92100{,}80$, $n=50$; e si cerca r. Ponendo questi dati nella formola (γ), si ha

$$N_1 = \frac{92100{,}80}{5000} = 18{,}4201600.$$

Il numero 18,4201600 è dunque il capitale definitivo prodotto in 50 anni da una lira impiegata alla tassa che si chiede; ora cercando questo numero nella linea orizzontale corrispondente a 50 anni, lo si trova (trascurando una piccolissima differenza) nella colonna 6 %; dunque la tassa cercata è 6.

(*) Se poi il quoto non si trova nella colonna della tassa, il tempo è un numero frazionario d'anni, la cui parte intera trovasi sulla linea del numero immediatamente inferiore al quoto. Per ottenere la parte frazionaria bisogna calcolare il capitale definitivo prodotto durante la parte intera, e sottrarlo dal capitale definitivo dato; la differenza sarà l'*interesse semplice* del primo capitale definitivo durante la frazione d'anno che si cerca (633). Si calcolerà pertanto questa frazione, e la si aggiungerà al numero degli anni.

Problemi sull'Interesse composto.

679. Qual sarà in capo a 15 anni il valore di ll. 38000 mutuate ad interesse composto 5 %?

680. Qual somma devesi impiegare ad interesse composto 5 % per ritirare in capo a 12 anni ll. 24000?

681. Valente ricevette ll. 30000 per capitale definitivo di ll. 2500 collocato ad interesse composto, 6 %; quanti anni rimasero a frutto?

682. In quanto tempo la somma di ll. 25000, impiegata ad interesse composto 4 % diventerà ll. 40000?

683. Volendo che ll. 18000 producano un capitale definitivo di ll. 23525,28 in 5 anni e ad interesse composto, dicasi a qual tassa converrà collocarle.

684. Comprai un terreno di Ea. 3 are 40 a ll. 950 l'Ea., e convenni di pagarlo dopo 12 anni cogl'interessi composti al 5 %. Quanto mi tocchèrà sborsare?

685. Quanti litri d'olio di balena fa d'uopo vendere a ll. 1,20 il Cg. per avere dopo 14 anni all'interesse composto di 5 % lire 57239,12, posto che 1 litro pesi Dg. 93?

686. Timoteo toglie ad imprestito una somma per 6 anni, offrendosi o di rimborsarla cogli interessi composti 5 % il che ammonterebbe a ll. 20000, ovvero di pagare il 6 % d'interesse semplice all'anno. Cerchisi la somma imprestata e qual modo torni più vantaggioso al mutuante.

687. A qual tassa per 100 converrà collocare ll, 18000 affinchè producano in 12 anni lo stesso capitale definitivo che produce la somma di ll. 20000 al 5 % durante lo stesso tempo?

688. Qual somma debbo impiegare ad interesse composto 5 % acciocchè dopo 5 anni e 3 mesi possa ritirare un capitale definitivo di ll. 120000?

689. A qual tassa debbo io collocare ll. 5420 ad interesse composto, perchè tal somma si triplichi in 25 anni?

690. Un padre lascia ll. 20000 al figliuolo in età allora di 3 anni; qual sarà l'avere di costui uscito di minorità (anni 21), se il tutore dopo dedotte ll. 11500 per la sua educazione, pone il rimanente alla cassa di risparmio al 6 %?

691. Un negoziante avendo comprato merce per ll. 40800 ne paga una parte tale, che il rimanente ammonterà dopo 5 anni a ll. 51426,55 compresi gl'interessi composti al 6 %. Trovisi la parte pagata.

692. Per m. 75 di raso largo $^4/_5$, si deve pagare dopo 3 anni, coll'interesse composto al 6 %, ll 1800. Quanto dovrassi sborsare per m. 60, larghi $^5/_6$ dopo 5 anni, calcolando gl'interessi alla medesima tassa?

693. Qual è la somma in cui $^2/_9$ impiegati per 7 anni ad interesse composto 4 $^1/_2$ %, diventano ll. 3903,97?

694. In quanto tempo si raddoppia un capitale impiegato

ad interesse composto a ciascuna delle tasse: 3; 4; 4 $^1/_2$; 5; 5 $^1/_2$ e 6 $^0/_0$?

695. S'impiegò una somma per 10 anni ad interesse composto 4 $^1/_2$ $^0/_0$. Trovisi a qual tassa la si dovrebbe impiegare all'interesse semplice, affinchè frutti in pari tempo un ugual capitale definitivo.

696. Lire 40000 poste per 2 anni ad interesse composto, fruttarono ll. 81 più di quello avrebbero prodotto essendo impiegate ad interesse semplice durante lo stesso tempo ed alla medesima tassa. Qual è questa tassa?

697. In capo a quanti anni le somme 60000 e 50000 lire collocate rispettivamente ad interesse composto 4 $^0/_0$ e 5 $^0/_0$ produrranno lo stesso capitale definitivo?

698. In quanto tempo una somma produrrebbe lo stesso capitale definitivo venendo impiegata, sia ad interesse composto 4 $^0/_0$, sia ad interesse semplice 5 $^0/_0$?

699. Lire 10000 collocate ad interesse composto durante 8 anni e 7 mesi, produssero un capitale definitivo di ll. 14897,10; qual n'era la tassa?

§ 7° — ANNUALITÀ E AMMORTIMENTI.

636. — ***Annualità.*** L'*annualità* è quella somma che s'impiega annualmente ad interesse composto, per avere, in un'epoca prestabilita, il capitale necessario ad un'impresa, ad una dote, ecc.

L'annualità può venire impiegata sì al principio e sì alla fine d'ogni anno.

637. — ***Formazione d'una Tavola pel calcolo delle annualità.*** Proponiamoci di trovare qual capitale definitivo si avrebbe dopo 4 anni, ponendo *al principio* d'ogni anno 1 lira ad interesse composto 5 $^0/_0$.

La 1ª annualità rimane a frutto 4 anni, la 2ª 3, la 3ª 2 e la 4ª 1; perciò si ha (Tavola N° I) che:

1 lira posta al princ. del	1°	anno	diventa	$(1,05)^4 = 1,2155063$
1 »	»	2°	»	$(1,05)^3 = 1,1576250$
1 »	»	3°	»	$(1,05)^2 = 1,1025000$
1 »	»	4°	»	$(1,05)^1 = 1,0500000$
		Totale		$(1,05)^4+(1,05)^3+(1,05)^2+(1,05)^1 = 4,5256313$

Calcolando in questo modo i capitali definitivi prodotti dall'annualità di 1 lira al 5 $^0/_0$ per qualsivoglia numero d'anni fino a 50, poi facendo lo stesso per le tasse, 3, 4, 4 $^1/_2$, 5 $^1/_2$ e 6, si avrà la Tavola seguente (N° II). Dunque:

Nella Tavola N° II ogni numero è la somma del suo corrispondente alla Tavola N° I e di tutti quelli che precedono questo medesimo corrispondente.

N° II. — **Tavola dei Capitali definitivi** risultanti dall'annualità di 1 lira impiegata ad interesse composto al principiar di ciascun anno.

Anni	3 %	4 %	4,50 %	5 %	5,50 %	6 %
1	1,0300000	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0550000	1,0600000
2	2,0909000	2,1216000	2,1370250	2,1525000	2,1680250	2,1836000
3	3,1836270	3,2464640	3,2781911	3,3101250	3,3422664	3,3746160
4	4,3091358	4,4163226	4,4707097	4,5256313	4,5810910	4,6370930
5	5,4684099	5,6329755	5,7168917	5,8019128	5,8880510	5,9753185
6	6,6624622	6,8982945	7,0191518	7,1420084	7,2668938	7,3938376
7	7,8923361	8,2142263	8,3800136	8,5491089	8,7215730	8,8974679
8	9,1591061	9,5827953	9,8021142	10,0265643	10,2562595	10,4913160
9	10,4638793	11,0061071	11,2882094	11,5778925	11,8753538	12,1807949
10	11,8077957	12,4863514	12,8411788	13,2067872	13,5834982	13,9716426
11	13,1920296	14,0258035	14,4640318	14,9171265	15,3855906	15,8699412
12	14,6177904	15,6263377	16,1599133	16,7129829	17,2867981	17,8821377
13	16,0863242	17,2919112	17,9321094	18,5986320	19,2925720	20,0150659
14	17,5989139	19,0235876	19,7840543	20,5785636	21,4086635	22,2759690
15	19,1568813	20,8245311	21,7193367	22,6574918	23,6411400	24,6725281
16	20,7615877	22,6975124	23,7417069	24,8403664	25,9964027	27,2128798
17	22,4144354	24,6454129	25,8550837	27,1323847	28,4812048	29,9056525
18	24,1168684	26,6712294	28,0635625	29,5390039	31,1026711	32,7599917
19	25,8703745	28,7780786	30,3714228	32,0659541	33,8683180	35,7855912
20	27,6764857	30,9692017	32,7831368	34,7192518	36,7860755	38,9927267
21	29,5367803	33,2479698	35,3033779	37,5052144	39,8643097	42,3922903
22	31,4528837	35,6178886	37,9370300	40,4304751	43,1118467	45,9958277
23	33,4264702	38,0826041	40,6891963	43,5019989	46,5379983	49,8155773
24	35,4592643	40,6459083	43,5652101	46,7270988	50,1523882	53,8645120
25	37,5530422	43,3117446	46,5706446	50,1134538	53,9659805	58,1563827
26	39,7096335	46,0842144	49,7113236	53,6691265	57,9891094	62,7057657
27	41,9309225	48,9675820	52,9933332	57,4025828	62,2335105	67,5281116
28	44,2188502	51,9662863	56,4230332	61,3227119	66,7113535	72,6397983
29	46,5754157	55,0849378	60,0070697	65,4388475	71,4354780	78,0581862
30	49,0026782	58,3283353	63,7523878	69,7607899	76,4194293	83,8016774
31	51,5027585	61,7014687	67,6662452	74,2988294	81,6774979	89,8897780
32	54,0778413	65,2095274	71,7562263	79,0637708	87,2247603	96,3431647
33	56,7301765	68,8579085	76,0302565	84,0669594	93,0771221	103,1837546
34	59,4620818	72,6522249	80,4966180	89,3203073	99,2513638	110,4347799
35	62,2759443	76,5983139	85,1639658	94,8363227	105,7651888	118,1208667
36	65,1742226	80,7022464	90,0413443	100,6281388	112,6372742	126,2681187
37	68,1594493	84,9703363	95,1382048	106,7095458	119,8873243	134,9042058
38	71,2342328	89,4091497	100,4644240	113,0950231	127,5361271	144,0584581
39	74,4012597	94,0255157	106,0303231	119,7997742	135,6056141	153,7619656
40	77,6632975	98,8265364	111,8466876	126,8397629	144,1189229	164,0476836
41	81,0231965	103,8195978	117,9247885	134,2317511	153,1004636	174,9505446
42	84,4838923	109,0123817	124,2764040	141,9933386	162,5759891	186,5075772
43	88,0484091	114,4128770	130,9138422	150,1430056	172,5722685	198,7580319
44	91,7198614	120,0293921	137,8499651	158,7001559	183,1191653	211,7435138
45	95,5014572	125,8705677	145,0982135	167,6851637	194,2457194	225,5081246
46	99,3965009	131,9453905	152,6726331	177,1194218	205,9842340	240,0086121
47	103,4083960	138,2632061	160,5879016	187,0253929	218,3683668	255,5645288
48	107,5406479	144,8337343	168,8593572	197,4266626	231,4336270	271,9584005
49	111,7968673	151,6670837	177,5030283	208,3479957	245,2174763	289,3359046
50	116,1807733	158,7737670	186,5356645	219,8153955	259,7594397	307,7560589

638. — ***Uso della Tavola precedente.*** Rappresentando con N_2 uno qualsiasi dei numeri della Tavola, il capitale definitivo prodotto da un'annualità c, impiegata *al principio* d'ogni anno, sarà cN_2; onde chiamandolo C si avranno le tre formole

$$(\alpha)\quad C = cN_2 \qquad (\beta)\quad c = \frac{C}{N_2} \qquad (\gamma)\quad N_2 = \frac{C}{c},$$

colle quali si possono risolvere tutti i problemi relativi alle annualità impiegate *al cominciare* d'ogni anno, adoperando le regole stesse dell'interesse composto (635), cioè adoperando sulla presente Tavola come si adoperò sulla prima.

Esempio. A quanto ascenderebbe la somma di L. 500 che si ponesse successivamente al principio di ciascun anno per 8 anni al 5 $^1/_2$ %?

Si ha $c = 500$, $r = 0{,}055$, $n = 8$, e si cerca C. Ora consultando la Tavola, si trova che il numero corrispondente a 8 anni 5 $^1/_2$ % è $N_2 = 10{,}2562595$: dunque dalla formola (α) si ha

$$C = 500 \times 10{,}2562595 = \text{ll. } 5128{,}13.$$

639. — Venga ora supposto di trovare il capitale definitivo risultante in capo a 5 anni dall'annualità di 1 lira posta *alla fine* d'ogni anno 5 %.

La 1ª annualità essendo posta alla fine del 1° anno, rimane a frutto 4 anni, la 2ª rimane 3 anni, la 3ª 2, la 4ª 1 e la 5ª posta alla fine del 5° anno non producendo nulla conserva il suo valore 1. Dunque il capitale definitivo è

$$(1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^1 + 1.$$

Confrontando questo risultato con quello ottenuto al n° 637, si scorge che 1 lira collocata *alla fine* d'ogni anno produce in *cinque* anni 1 più di quello che produce in *quattro* anni essendo collocata al principio; e siccome una tale relazione ha luogo qualunque sia il numero degli anni, se ne conchiude che:

La Tavola N° II serve altresì al calcolo delle annualità pagate alla fine d'ogni anno, purchè si diminuiscano di 1 gli anni del problema, e si aumenti di uno il numero della Tavola.

Esempio. Vogliasi calcolare a quanto ammonti dopo 8 anni l'annualità di 400 ll. posta *alla fine* d'ogni anno al 6 %.

Il numero corrispondente a 7 anni 6 % è 8,8974679; lo si aumenta di 1 e si ha

$$C = 400 \times 9{,}8974679 = \text{ll. } 3958{,}99.$$

640. — ***Ammortimenti.*** Chiamasi *ammortimento* l'estinzione d'un debito e de' suoi interessi composti, fatta per mezzo di annualità, cioè pagando durante un certo tempo la medesima somma *alla fine* d'ogni anno.

Ogni annualità pagata dal debitore si considera come da lui impiegata ad interesse composto presso il creditore; onde l'estinzione avrà luogo all'epoca in cui il capitale definitivo prodotto dalle annualità a favore del debitore, sarà uguale a quello prodotto dal debito a vantaggio del creditore.

641. — ***Formazione d'una Tavola pel calcolo degli ammortimenti.*** Proponiamoci di trovare quale annualità convenga pagare *alla fine* d'ogni anno, affinchè in capo a 5 anni venga estinta, co' suoi interessi composti 5 $^0/_0$, la somma di 1 lira imprestata al presente.

Dopo 5 anni il debito di 1 lira ammonterà (635) a

$$(1) \qquad (1{,}05)^5.$$

D'altra parte, chiamando x l'annualità richiesta, siccome (639) 1 lira diventa in 5 anni $(1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^1 + 1$, x lire diventeranno

$$(2) \qquad x\{(1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + 1{,}05)^1 + 1\}.$$

Risulta pertanto che alla fine del 5° anno il debitore dovrà al creditore il montare dell'espressione (1); e questi dovrà al primo il valore di (2). Ora siccome a tale epoca il debito deve essere estinto, bisogna (640) che queste due espressioni siano uguali, si ha dunque

$$x\{(1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^1 + 1\} = (1{,}05)^5, \text{ donde}$$

$$(3) \qquad x = \frac{(1{,}05)^5}{(1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^1 + 1}.$$

Il numeratore è il numero della Tavola N° I corrispondente a 5 anni 5 $^0/_0$, ed uguaglia 1,2762816; il denominatore è (637) il numero della Tavola N° II corrispondente a 4 anni 5 $^0/_0$, aumentato di 1, e vale 5,5256313. Dunque

$$x = 1{,}2762816 : 5{,}5256313 = 0{,}230975.$$

La Tavola N° III si è formata calcolando in questo modo il valore dell'annualità da pagarsi alla fine d'ogni anno, per estinguere il capitale di 1 lira co' suoi interessi composti in qualsivoglia numero d'anni fino a 50. Dunque:

Nella Tavola III^a ogni numero è il quoto che si ottiene dividendo il suo corrispondente nella I^a, per quello che immediatamente precede il suo corrispondente nella II^a, aumentato prima d'un'unità.

N° III. — **Tavola delle Annualità**

da pagarsi alla fine d'ogni anno per estinguere un capitale di 1 lira co' suoi interessi composti.

Anni	3 %	3,50 %	4 %	4,50 %	5 %	5,50 %	6 %
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000
2	0,522611	0,526400	0,530196	0,533998	0,537805	0,541618	0,545437
3	0,353530	0,356934	0,360349	0,363973	0,367209	0,370635	0,374110
4	0,269027	0,272251	0,275490	0,278744	0,282012	0,285294	0,288591
5	0,218355	0,221481	0,224627	0,227792	0,230975	0,234176	0,237696
6	0,184598	0,187668	0,190762	0,193878	0,197017	0,200175	0,203363
7	0,160506	0,163544	0,166610	0,169601	0,172820	0,175261	0,179135
8	0,142456	0,145477	0.148528	0,151610	0,154722	0,157864	0,161036
9	0,128434	0,131446	0,134493	0,137574	0,140690	0,143839	0,147022
10	0,117231	0,120241	0,123291	0,126379	0,129505	0,132668	0,135868
11	0,108077	0,111092	0,114149	0,117248	0,120389	0,123571	0,126793
12	0,100462	0,103484	0,106552	0,109666	0,112825	0,116029	0,119277
13	0,094030	0,097062	0,100144	0,103275	0,106456	0,109684	0,112960
14	0,088526	0,091571	0,094669	0,097820	0,101024	0,104279	0,107585
15	0,083767	0,086825	0,089941	0,093114	0,096342	0,099062	0,102963
16	0,079611	0,082685	0,085820	0,089015	0,092270	0,095383	0,098952
17	0,075953	0.079043	0,082199	0,085418	0,088699	0,092044	0,095445
18	0,072709	0,075817	0,078993	0,082237	0,085546	0,088911	0,092357
19	0,069814	0,072940	0,076139	0,079407	0,082745	0,086150	0,089621
20	0,067216	0,070361	0,073582	0,076876	0,080243	0,083679	0,087185
21	0,064872	0,068037	0,071280	0,074601	0,077996	0,081466	0,085005
22	0,062447	0,065932	0,069199	0,072546	0,075971	0,079471	0,083046
23	0,060814	0,064019	0,067309	0,070682	0,074137	0,077747	0,081278
24	0,059047	0,062273	0,065587	0,068987	0,072471	0,076036	0,089679
25	0,057428	0,060674	0,064012	0,057439	0,070952	0,074549	0,088227
26	0,055938	0,059205	0,062567	0,066021	0,069564	0,073193	0,076904
27	0,054564	0 057852	0,061239	0,064719	0,068292	0,071952	0,075697
28	0,053293	0,056603	0,060013	0,063521	0,067123	0,070814	0,074593
29	0,052115	0,055445	0,058880	0,062415	0,066046	0,069769	0,073580
30	0,051019	0,054371	0,057830	0,061392	0,065051	0,068805	0,072649
31	0,049999	0,053372	0,056855	0,060443	0,064132	0,067917	0,071792
32	0,049047	0,052442	0,055949	0,059563	0,063280	0,067095	0,071002
33	0,048156	0,051572	0,055104	0,058745	0.062490	0,066335	0,072073
34	0,047322	0,050760	0,054315	0,057982	0,061755	0,065629	0,069598
35	0,046539	0,049998	0,053577	0,057270	0,061072	0,064975	0,068974
36	0,045804	0,049284	0,052887	0,056606	0,060434	0,064366	0,068395
37	0,045112	0,048613	0,052240	0,055984	0,059840	0,063799	0,067857
38	0,044459	0,047982	0,051632	0,055402	0,059284	0,063272	0,067358
39	0,043844	0,047388	0,051061	0,054856	0,058765	0,062779	0,066894
40	0,043262	0,046827	0,050523	0,054343	0,058278	0,062320	0,066462
41	0,042712	0,046298	0,050017	0,053862	0,057822	0,061891	0,066059
42	0,042192	0,045798	0,049540	0,053409	0,057395	0,061489	0,065683
43	0,041698	0,045325	0,049090	0,052982	0,056993	0,061119	0,065333
44	0,041230	0,044878	0,048665	0,052581	0,056616	0,060762	0,065006
45	0,040785	0,044453	0,048262	0,052202	0,056262	0,060431	0,064701
46	0,040363	0,044051	0,047882	0,051845	0,055928	0,060122	0,064415
47	0,039961	0,043669	0,047522	0,051507	0,055614	0,059771	0,064148
48	0,039578	0,043306	0,047181	0,051189	0,055318	0,059558	0,063898
49	0,039213	0,042962	0,046857	0,050887	0,055040	0,059300	0,063664
50	0,038865	0,042634	0,046550	0,050602	0,054777	0,059061	0,063444

642. — ***Uso della Tavola precedente.*** Rappresentando con N_3 uno qualsiasi dei numeri della Tavola, l'annualità richiesta per estinguere un capitale c sarà cN_3; onde chiamandola a si avranno le tre formole

$$(\alpha) \quad a = cN_3 \qquad (\beta) \quad c = \frac{a}{N_3} \qquad (\gamma) \quad N_3 = \frac{a}{c},$$

colle quali si possono risolvere tutti i problemi relativi agli ammortimenti, operando sulla presente Tavola come si è fatto sulle precedenti.

La 1ª formola dà l'annualità, la 2ª il capitale da estinguersi, la 3ª gli anni e la tassa.

Esempio. Tolgo a prestito 8000 lire coll'obbligo di rimborsarle, in un cogl'interessi composti 4 %, in 5 pagamenti uguali, effettuati alla fine d'ogni anno. Di quanto sarà ciascun pagamento?

Si ha $c = 8000$, $n = 5$, $r = 0{,}04$, e si cerca a. Ora, consultando la Tavola, si trova che il numero corrispondente a 5 anni 4 % è 0,224627; dunque dalla formola (α) si ha

$$a = 8000 \times 0{,}224627 = \text{ll. } 1797{,}02.$$

Problemi sulle Annualità e sugli Ammortimenti.

700. Un operaio, al principiar d'ogni anno, usa portare alla cassa di risparmio ll. 250 al 4 %; trovisi il suo capitale definitivo in capo a 15 anni.

701. Qual somma devesi porre ad interesse composto 4 % al principio d'ogni anno per ritirare in capo a 20 anni ll. 25000?

702. Urbinate al principio d'ogni anno pone ll. 150 ad una cassa di risparmio, che dà il 5 %; quanto tempo dovrà egli aspettare per ritrarre ll. 6000?

703. Durante 8 anni si collocarono ogni anno ll. 2000 ad interesse composto 4 ½ %; qual sarà il capitale definitivo dopo 13 anni?

704. Alla fine d'ogni anno si collocarono ll. 800 al 4 % qual sarà il capitale definitivo dopo il 17°?

705. Quanto bisognerà porre annualmente durante 10 anni al 5 % per avere in capo a 15 anni ll. 34000 di capitale definitivo?

706. Qual annualità farà d'uopo impiegare a 4 ½ % fin dalla nascita d'un bambino per costituirgli a 21 anno il capitale necessario ad una rendita annua di ll. 3000 al 4 ½ %?

707. Per quanti anni consecutivi bisogna porre ll. 500 ad interesse composto 3 % a fine di avere un capitale definitivo di ll. 30000?

708. Una società, che toglie in prestito ll. 800000 al 5 %

per un'intrapresa industriale, vuole estinguere il suo debito in 20 anni; quale dovrà essere l'annualità?

709. Un ebanista compra per ll. 4200 di legno di noce da pagarsi, cogl'interessi composti 6 %, in rate uguali alla fine d'ogni anno. Di quanto sarà ciascun pagamento?

710. Avendo comprato m. c. 14,850 di marmo a ll. 580 il m.c., sborsai solo in contanti ll. 613; quanto dovrò pagare al termine d'ogni anno per saldare il mio debito in 4 anni, cogl'interessi 4 $^1/_2$ %?

711. Contrassi un debito di ll. 1120, che poi estinsi co' suoi interessi 5 % in tre pagamenti uguali, effettuati al terminare di ogni anno; quanto pagai annualmente?

712. Basilio nell'atto d'intraprendere il commercio dell'olio, ne compra 32 tonnellate, che paga cogli interessi 6 % sborsando ll. 950 alla fine d'ogni anno durante 10 anni. Dicasi il prezzo di una tonnellata.

713. Qual è il debito che si estingue, in un cogl' interessi 4 $^1/_2$ %, in 15 annualità di ll. 300 l'una?

714. Con 50 annualità di ll. 300 l'una si estinse il capitale di ll. 5476,78 ed i suoi interessi composti. Si cerchi la tassa.

715. Qual è il capitale che si estingue mediante 10 annualità di ll. 421,50, la tassa dell'interesse essendo 4 $^1/_2$ %?

716. Quanto per 100 frutta la somma di ll. 10000, se viene rimborsata in 6 pagamenti annui di ll. 1907, 62 l'uno?

717. Una società contrae l'imprestito di ll. 450000, che si propone di estinguere col minor numero possibile d'annualità, purchè non superiori a ll. 30000; gl'interessi essendo al 6 %, chiedesi: 1° il numero delle annualità, 2° il valore esatto di ciascuna.

718. Cornelio consacra annualmente ll. 1200 all'estinzione di un debito di ll. 12000; in quanti anni sarà egli libero, calcolando a 5 % gli interessi?

719. Una compagnia toglie a prestito ll. 300000, e s'impegna ad effettuarne il rimborso cogl'interessi 5 % in 10 annualità a patto che la prima di esse si paghi solo 5 anni dopo il prestito. Trovisi il valore dell'annualità.

§ 8° — SCONTO.

643. — Lo **sconto** è una deduzione fatta sur una somma che viene pagata prima dell'epoca convenuta.

Lo sconto costituisce pertanto un utile a favore del debitore, allorchè egli paga prima della scadenza.

Colui che paga la somma si dice **scontante,** e quegli che la riceve **scontatario.**

La somma da scontarsi diminuita dello sconto si chiama **somma scontata.**

644. — Supponiamo che C abbia presso D un credito di 5900 lire, esigibile fra 3 anni.

Se il debitore D pagasse dopo l'epoca stabilita, dovrebbe sborsare più di ll. 5900, a fine di compensare il creditore del lucro che prodotto gli avrebbe questa somma, se avesse potuto disporne.

Reciprocamente adunque, il debitore pagando prima dell'epoca convenuta, deve sborsare meno di 5900, a fine di venire compensato del lucro che avrebbegli prodotto questa somma fino al giorno della scadenza.

Si debbono pertanto considerare nel credito di C due valori, cioè il valore che esso ha all'epoca della scadenza, il quale dicesi **nominale;** ed il valore che ha prima di tal epoca, il quale si chiama **reale** o **attuale.** Il valore reale è minore del valore nominale.

Dalla distinzione di due valori in un medesimo credito deriva la distinzione di una sorta di sconto, cioè: lo sconto **commerciale,** detto anche sconto **in fuori** od **estrinseco,** e lo sconto **teorico,** detto altresì sconto **in dentro** od **intrinseco.**

645. — ***Sconto commerciale od in fuori.*** Lo sconto commerciale d'una somma è l'interesse del valore *nominale* di essa.

Così se la tassa dello sconto è 6, un debito di 100 ll. pagato un anno prima darà ll. 6 di sconto; onde il debitore non isborserà che 94 lire.

La ricerca dello sconto commerciale d'una somma si riduce pertanto a cercare l'interesse della medesima pel tempo dell'anticipazione. Si avrà dunque (624):

100 *sta alla tassa moltiplicata pel tempo come la somma da scontare sta allo sconto.*

Applichiamo questa proporzione alla ricerca dello sconto di cui godrebbe D se pagasse presentemente le 5900 lire, essendo 6 % la tassa dello sconto. Si ha

$$100 : 6 \times 3 :: 5900 : x = \frac{5900 \times 6 \times 3}{100} = \text{ll. } 1062 \text{ (}sconto\text{)}.$$

Cosicchè egli sborserebbe solamente $5900 - 1062 = \text{ll. } 4838$ *(somma scontata).*

646. — In generale, chiamando c la somma da scontare, i la tassa, t gli anni anticipati, e s lo sconto commerciale, si avrà

$$(\alpha) \qquad 100 : it :: c : s, \text{ donde (1)} \quad s = \frac{cit}{100}.$$

Rappresentando con n qualsivoglia numero di giorni, si avrà pure come per l'interesse (627):

$$(2) \qquad s = \frac{cin}{36000};$$

dal che si conchiude che i metodi dei *divisori fissi* e delle *parti aliquote*, i quali derivano da questa formola, sono pure applicabili allo sconto commerciale.

647. — Si può, senza calcolare lo sconto, trovare direttamente la somma scontata.

Infatti la proporzione (a) dà (602)

$$100 : 100 - it :: c : c - s;$$

ora $c - s$ è la somma scontata; chiamandola s', si avrà

$$(3) \qquad s' = \frac{c\ (100 - it)}{100}.$$

Applicando questa formola alla questione precedente, risulta

$$s' = \frac{5900\ (100 - 6 \times 3)}{100} = 59 \times 82 = \text{ll. } 4838.$$

648. — ***Sconto teorico o in dentro.*** Lo sconto teorico d'una somma è l'interesse del valore *reale* di essa.

Supponendo 6 la tassa dell'interesse, 100 lire varranno fra un anno 106; perciò reciprocamente il valore reale di ll. 106 pagabili fra un anno è 100. Dunque un debito di ll. 106 pagato un anno prima dà 6 di sconto.

Similmente essendo sempre 6 la tassa dell'interesse, 100 ll. varranno dopo 3 anni $100 + 6 \times 3$; perciò reciprocamente lire $100 + 6 \times 3$ pagabili fra 3 anni valgono presentemente ll. 100.

Dunque lo sconto teorico di ll. $100+6\times3$ pagabili fra 3 anni è ll. 6×3.

Segue da ciò, che per trovare lo sconto teorico d'una somma bisogna stabilire la proporzione seguente:

100 *più la tassa moltiplicata pel tempo, sta alla tassa moltiplicata pel tempo, come la somma da scontare sta allo sconto.*

Applichiamo questa proporzione al problema precedente di cui già calcolammo lo sconto commerciale. Si avrà

$$100+6 \times 3 : 6\times3:: 5900 : x = \frac{5900 \times 6 \times 3}{100+6 \times 3} = \text{ll. } 900.$$

Il debitore non godrebbe in questo modo che 900 ll. di sconto, e dovrebbe perciò sborsare $5900 - 900 = 5000$ ll.

649. — In generale, chiamando c la somma da scontare, i la tassa, t gli anni anticipati e s lo sconto teorico, si avrà

$$(\beta) \quad 100 + it : it :: c : s; \text{ onde } (4) \qquad s = \frac{cit.}{100+it}.$$

Rappresentando con n il numero dei giorni compresi in t anni, si avrà $n = t \times 360$, donde $t = \frac{n}{360}$. Sostituendo questo valore di t nella formola (4), essa diventa

$$(5) \qquad s = \frac{cin}{36000+in},$$

la quale serve a calcolare lo sconto teorico per qualsivoglia numero di giorni.

650. Si può, senza calcolare lo sconto, trovare direttamente la somma scontata.

Infatti, la proporzione (β) dà (602)

$$100+it : 100+it-it :: c : c-s, \text{ ossia}$$
$$100+it : 100 :: c : c-s;$$

ora $c-s$ è la somma scontata; chiamandola s', si avrà

$$(6) \qquad s' = \frac{100c}{100+it}.$$

Applicando questa formola alla questione precedente, risulta

$$s' = \frac{5900 \times 100}{100+6 \times 3} = \frac{590000}{118} = 11.\ 500.$$

651. — *Lo sconto in fuori è uguale allo sconto in dentro aumentato de' suoi interessi.* Questa verità appare dalle definizioni stesse de'suoi sconti; essa però può dimostrarsi nel modo seguente.

L'interesse dello sconto in dentro s è $\frac{sit}{100}$; or aggiungendo quest'interesse allo sconto s, si ha:

$$s + \frac{sit}{100} = \frac{100s+sit}{100} = s \times \frac{100+it}{100};$$

e sostituendo ad s il suo valore (form. (4), risulta

$$\frac{cit.}{100+it} \times \frac{100+it}{100} = \frac{cit\,(100+it)}{100(100+it)} = \frac{cit}{100}.$$

che è precisamente lo sconto in fuori (form. (1).

Lo sconto in fuori essendo maggiore dell'altro, riesce piú vantaggioso allo scontante. Esso viene chiamato *commerciale*, perchè secondo questo si scontano ordinariamente i crediti nel commercio.

652. — ***Sconto composto.*** Dicesi **sconto composto** di una somma l'interesse composto del valor reale della medesima.

Nella formola $C = cN_1$ dell' interesse composto (635), c è il capitale imprestato, e C il suo valore definitivo dopo n anni. Reciprocamente se C si riguarda come un capitale pagabile dopo n anni, c rappresenterà il suo valore reale, cioè la *somma scontata*. Ora dalla formola precedente si ricava quest'altra

$$c = \frac{C}{N_1};$$

la quale fa vedere che nello sconto composto la ricerca della somma scontata altro non è che una delle quattro questioni relative all'interesse composto, cioè quella in cui si cerca il capitale imprestato.

653. — ***Avvertenza.*** In commercio i crediti vengono spesse volte rappresentati da carte chiamate *Effetti di commercio* (V. Cap. II° § 2); quindi un Effetto si considera come avente i valori nominale e reale della somma che esso rappresenta, e si dice *pagare e scontare*, ecc. l'effetto per dire *pagare, scontare*, ecc. la somma stessa. Ciò premesso, s'intenderanno facilmente i seguenti problemi.

Problemi sullo Sconto (*).

720. Qual è lo sconto di ll. 40000 per 6 mesi al 3 % all'anno?

721. Una cambiale di ll. 1200, scadente il 1° ottobre, viene scontata al 6 % il 22 agosto; qual ne sarà lo sconto?

722. Son debitore di ll. 2571,10 pagabili come segue: lire 1041,60 fra 10 mesi, ll. 616 fra 8, ed il rimanente fra 22. Quanto sborserei in contanti collo sconto del 4 %?

723. Un biglietto di ll. 1800, pagabile il 1° luglio, viene scontato *in dentro* al 5 % il 10 maggio. Dicasene lo sconto.

724. Qual è il valore presente di un effetto di ll. 6680, pagabile fra 5 mesi e 17 giorni, se viene scontato al 5 ½ %?

725. Petronio avendo bisogno di danaro, fa scontare al 6 % un biglietto di ll. 100 scadente fra tre mesi; quanto riceverà egli?

726. Avendo contratto un debito di ll. 1640,50 da saldarsi fra 16 mesi, lo estingue con ll. 1465,52, pagando prima del termine con 8 % di sconto. Di quanto anticipai il pagamento?

727. Qual è il montare d'una cambiale, la quale scontata *in dentro* all'1 ¾ %, si riduce a ll. 11793,62?

728. Per una merce da me comprata, debbo pagare ll. 1120 fra 25 mesi e ll. 2280 dopo altri 5 mesi. Quanto sborserei se, godendo l'8 % di sconto *in dentro*, pagassi la 1ª somma fra 7 mesi e la 2ª due mesi dopo?

729. Ho un effetto di ll. 3646 scadente fra 9 mesi, e posso farlo scontare al 6 % *in dentro* od *in fuori;* di quanto mi tornerà più vantaggioso il 1° modo?

730. Idelfonso fa scontare al 5 % da un banchiere gli effetti seguenti: 1° ll. 3217,60 a 2 mesi 5 giorni; 2° ll. 849,50 a 3 mesi 11 giorni; 3° ll. 1940 a 3 mesi 23 giorni; 4° ll. 650 a 5 mesi 25 giorni; 5° ll. 2244,45 a 1 mese 19 giorni. Quanto incasserà?

731. Paolo doveva ll. 28830 pagabili dopo 3 anni con facoltà di fare antecipazioni mediante lo sconto 9 %. Ora avendo pagato ll. 14322,50 in capo a 15 mesi, diede poi soltanto ll. 10410,40 pel rimanente; a qual epoca dovette sborsare quest'ultima somma?

(*) Allorchè in questi problemi non sarà altrimenti indicato, si dovrà intendere lo sconto *in fuori*.

732. Ho riscosso ll. 5917 facendo scontare al 6 % due cambiali ammontanti insieme a ll. 5970, la 1ª scadente fra mesi 1 ½ e la 2ª fra 2 mesi 25 giorni. Qual era il montare di ciascuna?

733. Tre effetti di ll. 1800 caduno, le cui scadenze sono espresse da numeri di giorni proporzionali a 17, 19 e 23, produssero in tutto ll. 73,75 di sconto 5 %. Trovisi lo sconto e la scadenza di ciascuno.

734. Di due cambiali scontate al 6 % la 1ª diede ll. 52 di sconto; la 2ª avrebbe dato ll. 33,80 se avesse avuto la medesima scadenza, ma perchè era esigibile 12 giorni prima, diede solo ll. 28,60. Si domanda il montare e la scadenza di ciascuna.

735. Un biglietto dà il medesimo sconto, sia che venga scontato *in dentro* al 6 ¼ %, oppure *in fuori* al 6 %. Qual n'è la scadenza?

736. Il proprietario di un effetto scadente fra 3 mesi e 6 giorni, guadagnerebbe ll. 0,20, se invece di farlo scontare *in fuori* al 5 %, potesse ottenere lo sconto *in dentro* alla medesima tassa. Cerchisi il montare dell'effetto e quello dei due sconti.

737. Macario, che mi deve ll. 4000 pagabili fra 5 anni, si offre a sborsarmele di qui ad un anno, se io gli concedo lo sconto composto di 3 % o lo sconto *in dentro* 3 ⅕ %, oppure lo sconto *in fuori* 3 1/10 %. Qual partito mi torna più vantaggioso?

CAPO II.

RENDITE SULLO STATO, EFFETTI DI COMMERCIO, CONTI CORRENTI, ECC.

§ 1° — RENDITE SULLO STATO O FONDI PUBBLICI.

654. — Le **rendite sullo Stato** sono interessi che il Governo paga per somme da lui prese ad imprestito.

Tali rendite prendono il nome dalla tassa dell'interesse. Così si dice la rendita del 5 %, del 4 ½ %, del 3 %, o semplicemente il 5 %, il 4 ½ %, il 3 %.

655. — Allorchè un privato prende ad imprestito, paga una rendita più o meno elevata per un capitale invariabile che è 100; il Governo, per l'opposto, esibisce una rendita fissa per un capitale variabile. Se egli, a cagion d'esempio, vuol contrarre un prestito al 5 %, offrirà al pubblico 5 lire di rendita annua in premio d'un capitale, che potrà essere maggiore o minore di 100.

Segue da ciò, che il capitale si distingue in **nominale** ed **effettivo.**

Il nominale è sempre rappresentato da 100, qualunque sia la tassa; l'effettivo viene rappresentato dalla somma che il Governo percepisce per ogni 5, 4 $^1/_2$, 3 ll. di rendita ch'ei paga.

656. — Il modo tenuto dai governi nel contrarre imprestiti dicesi *emettere* o *creare rendita*, e quindi si chiama **prezzo di emissione** quello a cui viene ceduta la rendita, ossia il capitale effettivo. Il prezzo di emissione si dice **al pari, sotto** o **sopra il pari,** secondo che il capitale effettivo è uguale, minore o maggiore del nominale.

657. — Le rendite sullo Stato vengono rappresentate da **titoli,** i quali si possono vendere o comperare come ogni altra merce, ad un prezzo maggiore o minore del prezzo di emissione, secondo la maggiore o minore ricerca dei medesimi, il che costituisce il così detto *rialzo* o *ribasso dei fondi pubblici.* Questo traffico dei titoli di rendita si effettua per lo più presso le *Borse di Commercio*, ed il loro prezzo corrente, chiamato **corso,** viene pubblicato sui *listini di Borsa.* Il corso della rendita, come il prezzo di emissione, si dice *al pari, sotto* o *sopra il pari*, secondo che esso è uguale, minore o maggiore di ll. 100.

1° *Esempio.* Emettendosi dal Governo una rendita 5 % al prezzo di ll. 80, quanto dovrò spendere per acquistare un titolo di 1000 lire?

Il *prezzo di emissione* essendo 80 e la tassa 5, ciò vuol dire che 5 ll. di rendita costano 80 lire; dunque

$$5 : 80 :: 1000 : x = \text{ll. } 16000. \textit{ Risp.}$$

2° *Esempio.* La rendita precedente essendo salita a ll. 94, vendo il mio titolo; quanto ne ricaverò?

Il *corso* essendo 94 e la tassa 5, ciò vuol dire che da 5 ll. di rendita si ricavano 94 lire; dunque

$$5 : 94 :: 1000 : x = \text{ll. } 18800. \textit{ Risp.}$$

658. — ***Debito pubblico.*** La somma di danaro di cui lo Stato è debitore verso il pubblico costituisce il **Debito pubblico dello Stato.**

659. — Il debito pubblico si distingue in debito *consolidato* ed in debito *fluttuante.*

660. — Il **debito consolidato** è quello formato dal complesso delle somme ricavate da que' prestiti, pel cui interesse lo Stato ha fissato un fondo annuo determinato. I titoli che rappresentano questi prestiti si chiamano in genere **fondi pubblici** o **rendite sullo Stato.**

661. — Il debito **fluttuante** od **oscillante** è formato dai capitali che il Governo toglie a prestito temporaneo per sopperire al disavanzo delle pubbliche casse, od a qualunque altro

straordinario bisogno. I titoli che i mutuanti ricevono in simili circostanze sono conosciuti col nome di **biglietti** o **buoni del Tesoro.** La loro scadenza il più delle volte è variabile da 3 a 6 mesi, nè può mai eccedere la durata d'un esercizio od anno *finanziario.*

662. — Colla legge 10 luglio 1861 sono riconosciuti, consolidati e dichiarati debiti del nuovo Regno d'Italia tutti i debiti contratti dai cessati governi sotto forma di rendita pubblica.

Nel 1866 il debito pubblico dello Stato era di ll. 5293856767,84 *(Annuario del Ministero delle finanze, anno 1866).*

663. — Il debito consolidato si divide in *redimibile* o *perpetuo.* È **redimibile** se, oltre il fondo assegnato per l'annuo pagamento degl'interessi (660), evvi un fondo di *ammortimento* od *estinzione* del capitale. È **perpetuo** se non vi è alcun fondo di estinzione.

664. — L'estinzione del debito redimibile si effettua o per via di *estrazione a sorte* o con *acquisti al corso.*

Nell'estrazione a sorte i proprietari de' numeri usciti ricevono il *rimborso al pari* del capitale dei titoli. L'estinzione per acquisti al corso si fa dal Governo per mezzo di agenti di cambio che comperano i titoli al corso del giorno.

665. — Le rendite sullo Stato si distinguono in **cartelle di rendita** o **cedole,** ed in **obbligazioni dello Stato.**

666. — Le cartelle di rendita o cedole sono di due specie, al *portatore* e *nominative.* Diconsi al **portatore** quelle che si presumono appartenenti a chi le porta e si trasmettono a vista; **nominative** quelle che portano scritto il nome, il cognome, la figliazione ed il domicilio del proprietario.

667. — Le cedole al portatore si possono convertire in nominative, e viceversa, mediante domanda per iscritto all'Amministrazione del debito pubblico.

668. — Le *obbligazione dello Stato* sono tutte al portatore; ciascuna di esse rappresenta un capitale nominale di L. 1000 fruttanti il 4 %, più 1 %, che viene convertito in premio a ciascuno de' cinque primi numeri estratti. Questi premi variano da 1000 a 50000 ll.

669. — Gl'interessi de' fondi pubblici si pagano per semestri in tutte le tesorerie dello Stato, ed anche in alcune città d'altri Stati.

Il pagamento delle rate delle iscrizioni nominative si fa mediante quitanza. Quello invece delle rate delle iscrizioni al portatore si fa consegnando la cedola *(coupon)* (*).

(*) I fondi pubblici esteri dando luogo agli stessi computi sin qui esposti, prescindiamo dal farne speciale menzione.

Problemi sui Fondi pubblici.

738. Quanto di rendita al 5 % si avrà egli con 4500 ll., il corso essendo 115?

739. Un banchiere compra rendita 5 % al corso 80; a qual tassa pone egli il suo danaro?

740. A qual corso dev'essere la rendita 4 %, affinchè il danaro impiegato frutti il 6 ½ %?

741. Le obbligazioni essendo di ll. 1000, quanto spenderassi a comperarne 3 al corso 1128,50?

742. A qual tassa colloca il proprio danaro colui il quale compra obbligazioni al corso 1185,85?

743. La rendita 5 % essendo al corso 122,25, quanto converrà sborsare per due cedole, una di ll. 1000 e l'altra di ll. 200?

744. Il 4 ½ % essendo al pari, qual dev'essere il corso del 3 %, acciocchè la tassa reale sia la medesima?

745. Innocenzo vende al corso 1123,40 otto obbligazioni acquistate a 1119,20; qual è il suo benefizio?

746. Alcune cedole rappresentanti insieme ll. 420 di rendita 3 % vennero acquistate con ll. 6342; qual era il corso?

747. Valerio spese ll. 7383 in obbligazioni al corso 1230,50; quante ne comprò?

748. Se invece egli avesse impiegato il suo danaro al 4 % quanto avrebbe avuto di guadagno o di perdita?

749. Qual è il corso della rendita 5 %, se alcune cedole rappresentanti insieme ll. 875 costano ll. 17158,75?

750. È egli meglio comprare del 4 ½ % a 92,50, ovvero del 3 % a 67,80? E scegliendo la tassa più vantaggiosa, qual guadagno si farebbe con ll. 20000?

751. Il 5 % essendo al pari, qual dev'essere il corso del 4 ½ %, affinchè la tassa reale sia la stessa?

§ 2° — EFFETTI DI COMMERCIO.

670. — Diconsi **effetti di commercio** quelle carte di credito che si possono far circolare come il danaro. Tali sono: la *lettera di cambio* (o *cambiale*), *il biglietto all'ordine, il mandato* e la *lettera di credito*.

Lettera di cambio.

671. — La **lettera di cambio** è quello scritto col quale una persona commette ad un'altra domiciliata in diversa città di sborsare, ad un terzo ed in epoca fissa, certa somma di cui ella riconosce aver ricevuto l'ammontare o realmente o in conto.

672. — La lettera di cambio per essere legalmente redatta deve:

1° Essere tratta da un luogo sopra un altro.
2° Essere datata.
3° Enunciare la somma da pagarsi.
4° » il nome di colui che la deve pagare.
5° » il tempo ed il luogo in cui il pagamento deve effettuarsi.
6° » il valore somministrato in moneta, in merci, in conto od in qualunque altra maniera.
7° Essere all'ordine di un terzo o all'ordine del traente medesimo.
8° Enunciare se è per 1ª, 2ª, 3ª, giacchè può esser tratta in vari esemplari.

Modulo di Lettera di cambio,

Torino, 30 *dicembre* 1874. B. P. *L. it. 6000.*

A sessanta giorni data *pagate per questa* Prima *di Cambio all'ordine del sig.* Lorenzo Martini... *la somma di* seimila lire italiane.

Valuta ricevuta in mercanzie *che passerete secondo l'avviso di*

Accettata
Genova, il 6 genn. 1875.
CAMILLI.

Al Sig. CAMILLI *e Comp.*
a Genova.

A. Blanciardi.

673. — Tre persone debbono intervenire in una lettera di cambio, e sono:

1° Il **traente**, cioè quegli che crea la lettera o la sottoscrive; nella precedente il traente è Blanciardi.

2° Il **possessore** o **remittente,** cioè quegli al cui profitto la lettera di cambio è tratta; nel precedente modulo il possessore è Martini.

3° Il **trattario** sul quale la lettera di cambio è tratta e che la deve pagare; nella precedente è Camilli e Comp. La cambiale rispetto al *trattario* dicesi **tratta,** e riguardo al *remittente* o *possessore* dicesi **rimessa.**

Il trattario non contrae l'obbligo di pagare l'ammontare della lettera se non per l'*accettazione*, nel qual caso egli dicesi **accettante.**

674. — ***Scadenza.*** L'epoca fissata pel pagamento d'una lettera di cambio si chiama *scadenza*. La lettera di cambio può esser tratta:

1° A vista, cioè pagabile nell'atto della presentazione.
2° Ad uno o più giorni
3° Ad uno o più mesi } di *vista* o di *data*.
4° Ad uno o più usi
5° A giorno fisso.
6° In fiera, cioè la vigilia della chiusura della fiera, o il dì stesso di essa, se è d'un sol giorno.

Se il dì della scadenza è festivo, il pagamento è esigibile la vigilia.

675. — L'*uso* in Italia è di 30 giorni, ed i mesi si contano giusta il calendario Gregoriano. Nel computare i giorni della scadenza d'una cambiale non si tien conto del giorno della data, ma sì dell'ultimo che ne determina la scadenza.

Esempio. Quanti giorni comprende la scadenza d'una cambiale sottoscritta il 17 marzo e pagabile a tre mesi di data?

La cambiale portando la data del 17 marzo, scadrà il 17 giugno; la scadenza comprende pertanto:

di marzo giorni 31 — 17 = 14
di aprile » 30
di maggio » 31
di giugno » 17
} = 92 giorni

676. — ***Accettazione.*** L'*accettazione* è atto con cui il trattario si obbliga a pagare la lettera di cambio. Quest'atto si scrive in fine od a tergo della lettera, e consiste ordinariamente nella sola parola *accettata* o *visto*, colla data e la sottoscrizione.

677. — L'accettazione è di tre sorta: 1° accettazione pura e semplice; 2° accettazione condizionale, ovvero ristretta, quanto alla somma od al tempo; 3° accettazione per intervenzione o sotto protesto.

L'accettazione per intervenzione si fa ad un negoziante o banchiere per fare onore alla sottoscrizione del traente o di uno dei giranti, e ciò dopo il rifiuto del trattario, previo un atto detto *protesto* (680).

678. — ***Girata.*** Il possessore d'una lettera di cambio può cederla ad un altro, cioè fargliene la *girata*, ed allora il proprietario della lettera prende il nome di **girante,** e colui a cui rimane dicesi **giratario.** Questi può ancora cederla ad un terzo che dirassi, come il secondo, giratario, e diviene a sua volta girante, e così via via. L'ultimo proprietario della lettera prende il nome di *portatore*.

La **girata** o **trasferimento** è l'atto per cui il possessore cede la lettera di cambio ad altra persona, adempiendo però le necessarie formalità, cioè: datando la girata, esprimendo il valore somministrato, ed il nome di colui al cui ordine vien fatta. Se la girata non è conforme a queste legali disposizioni, non trasferisce la proprietà della lettera di cambio al giratario, la quale continua ad essere proprietà del girante.

Esempio. *Martini* vuol trasferire la lettera di cambio al signor *Monino;* egli fa la girata scrivendo a tergo e di traverso questa formola:

Pagate all'ordine del sig. Monino
Valuta ricevuta in contanti.
Asti, 15 *gennaio* 1875.
MARTINI.

Ora, *Monino* essendo giratario della lettera di cambio, può alla sua volta cederla ad un altro. Supponiamo che ciò sia in favore di *Giulio;* egli scriverà in seguito alla prima girata così:

Pagate all'ordine del sig. Giulio
Valuta ricevuta in mercanzie.
Alessandria, 25 *gennaio* 1875.
MONINO.

E se *Giulio* la trasferisce a *Fortini,* egli scriverà in seguito alle due sottoscrizioni:

Pagate all'ordine del sig. Fortini
Valuta ricevuta in danaro.
Novara, 7 *febbraio* 1875.
GIULIO.

Di modo che *Martini, Monino* e *Giulio* divennero successivamente *possessori, giranti* e *giratari.*

679. — ***Quitanza.*** Ora supponiamo che *Fortini,* ultimo possessore, presenti a *Camilli* la cambiale per l'accettazione; se questi l'accetta, e alla scadenza la paga, *Fortini* scriverà sotto la lettera questa formola:

Per quitanza
FORTINI.

680. — ***Protesto.*** Se poi non volesse accettarla, o accettatala, alla scadenza rifiutasse di pagarla, *Fortini* la farebbe *protestare.*

Il **protesto** è un atto giuridico, che deve essere fatto da un notaio, o da un usciere, alla residenza del trattario nel giorno che segue quello della scadenza (*).

681. — ***Rivalsa.*** Dopo protestata la cambiale Fortini ne spicca un'altra, detta **rivalsa,** sul traente o sopra uno dei giranti, per rimborsarsi del capitale della lettera protestata, e delle spese di protesto. La *rivalsa* dev'essere accompagnata dalla lettera di cambio protestata, da una copia dell'atto di protesto e dal *conto di ritorno.*

682. — ***Conto di ritorno.*** Il *conto di ritorno* è la nota

---

(*) Affinchè si possa invocare l'intervento della legge per una cambiale, od altro effetto di commercio, fa d'uopo che siano muniti del bollo proporzionale, sotto pena di multa.

colla quale si annuncia al traente od al cedente dell'effetto, l'ammontare delle spese cagionate dalla non fatta accettazione, o dal non effettuato pagamento.

Modulo d'un Conto di ritorno.

Al sig. A. BLANCIARDI, *Torino.*

Eccovi il conto di ritorno alla vostra tratta del 30 dicembre scorso di 11. 6000 sopra il sig. *Camilli* di Genova all'ordine di *Lorenzo Martini*, scaduta il 28 febbraio, protestata per difetto di pagamento.

	Capitale..... L.			6000	»
Spese	Protesto e copia.....	5	80	46	05
	Senseria alla rivalsa 1 $^{00}/_{00}$.....	6	00		
	Bollo del presente e della rivalsa..	4	05		
	Provvigione $^{1}/_{2}$ $^{0}/_{0}$.....	30	00		
	Porto di lettere.....	0	20		
	Totale.....L.			6046	05

Delle quali *sei mila quaranta sei lire cinque centesimi* mi sono oggi rivalso con mia tratta a vista all'ordine del sig. *L. Parodi* sopra la vostra casa al cambio di 99,50.

Genova, 28 febbraio 1875.

G. FORTINI.

Io sottoscritto certifico vero il cambio di detta rivalsa.

L'agente di cambio
Spola.

Modulo della Rivalsa.

Genova, 28 febbraio 1875. *B. P. L. it.* 6046,05.

A vista pagate per questa prima di Cambio all'ordine del signor Luigi Parodi, la somma di lire *sei mila quaranta sei cinque centesimi*, per valuta ricevuta in contanti che passerete per l'ammontare del conto di ritorno e dell'effetto protestato qui annesso.

Al sig. *A. Blanciardi*
Torino.

G. FORTINI.

Biglietti all'ordine o Pagherò.

683. — Il **biglietto all'ordine** è uno scritto col quale una persona si obbliga di pagare all'ordine di un'altra certa somma ad epoca stabilita.

Tutte le disposizioni relative alle lettere di cambio sono ap-

plicabili ai biglietti all'ordine. Esso debb'essere datato, ed enunciare: 1° la somma da pagarsi; 2° il nome di colui al cui ordine è sottoscritto; 3° il tempo in cui debbe effettuarsi il pagamento; 4° il valore somministrato in danaro, in merci, in conto od in qualunque altra maniera. Chi soscrive il biglietto dicesi **sottoscrittore,** e chi deve riceverne il pagamento **portatore.**

Il biglietto all'ordine potendo trarsi, negoziarsi e pagarsi sopra una stessa città, serve al commercio interno del luogo.

Modulo di Biglietto all'ordine.

Torino, *4 settembre* 1875. B. P. *L. it.* 6000.

Ai 10 agosto pross., *pagherò io sottoscritto all'ordine del sig.* Federici *la somma di* sei mila lire italiane.

Valuta ricevuta in contanti.

LORENTI.

684.—Il pagherò prende il nome di **biglietto a domicilio** quando un commerciante promette di pagare una somma in luogo o domicilio diverso da quello ove il biglietto viene sottoscritto.

Modulo di Biglietto a domicilio.

Genova, *4 maggio* 1875. B. P. *L. it.* 1000.

A *trenta giorni data* pagherò *io sottoscritto all'ordine del sig.* Giulio *la somma di* mille lire italiane.

Valore ricevuto in merci.

Pagabile presso il sig. Giacomo Bensa
negoziante in via... n° 35,
Torino.

RICCARDI.

685. — Quando il biglietto all'ordine non indica il nome del creditore, prende la denominazione di **biglietto al portatore.**

Modulo di Biglietto al portatore.

BUONO PER LIRE TRECENTO che pagherò al portatore del presente.

Genova, 24 maggio 1875.
L. PARODI.

Mandato.

686. — Il mandato in generale è un atto col quale una persona dà ad un'altra il potere di agire in suo nome.

687. — Il **mandato commerciale** è un ordine, o meglio una preghiera fatta da una persona ad un suo corrispon-

dente di pagare al portatore indicato nel mandato od al suo ordine, una data somma ad epoca stabilita.

Chiamasi **mandante** colui che crea il mandato e **mandatario** colui che deve pagarlo.

688. — Questa specie di mandati si fanno ordinariamente per somme di poca entità e pel pagamento di debiti rimasti. I mandati non essendo considerati quali titoli legali, non possono farsi accettare nè protestare in caso di rifiuto al pagamento.

Formola d'un Mandato

Torino, 4 *dicembre* 1875. B. P. *L. it.* 300.

Al trenta agosto prossimo vi prego di pagare mediante questo mandato all'ordine del signor Battone Andrea *la somma di* trecento lire italiane.

Valuta ricevuta in contanti che passerete secondo l'avviso del

Al signor Pio Goletti
Mondovì.

Vostro osseq^mo Servitore
SILVANI.

Lettera di credito.

689. — La **lettera di credito** o **credenziale**, è quello scritto per cui il sottoscrittore dà ordine ad un suo corrispondente di mettere a disposizione del latore della lettera la somma in essa determinata.

Esempio. Ambrogio Carlini da Milano deve recarsi a Londra e rimanervi qualche tempo; per evitare l'incomodo di portar seco molto danaro, rimette al banchiere Bondinelli ll. 6000, e questi gli rilascia la seguente lettera.

Modulo di credenziale.

Milano, 4 febbraio 1875.

Sig. E. WERSEIPS, Londra,

Questa lettera vi sarà presentata dal sig. *Ambrogio Carlini* che vi raccomando in modo speciale.

Vi prego pagargli per mio conto quelle somme di cui avrà d'uopo, sino all'ammontare di lire *sei mila*, mediante sue quitanze in doppio, delle quali m'invierete copia, prevalendovi a vista pel vostro rimborso sopra me stesso.

A tergo della presente vi compiacerete notare tutti i pagamenti cha farete al signor *Carlini*.

Ricevete gli anticipati miei ringraziamenti pei riguardi che userete al mio raccomandato.

Vi saluto cordialmente.

P. BONDINELLI.

690. — La *credenziale* si deve far precedere da una lettera d'avviso nella quale, oltre la firma del sottoscrittore, siavi, anche quella del latore, acciocchè il corrispondente abbia un mezzo per accertarsi dell'identità della persona.

Problemi sugli Effetti di commercio.

752. Facciasi una lettera di cambio di ll. 4000 di cui Giacomo sia il trattario, Giovanni il traente e Filippo il possessore.

753. Si formoli una cambiale di ll. 3500 per 2ª copia a 40 giorni di data, e che abbia già avuto tre girate.

754. Fare una lettera tratta da Benedetto di Genova, pagabile a Lione da Burdino all'ordine di Amedeo da Torino.

755. Si formoli una tratta a vista, un'altra a 15 giorni di vista, ed una terza a due usi, tutte e tre con accettazione e due girate.

756. Formolare un biglietto a domicilio di 2500 ll. pagabile il 6 ottobre 1875.

757. Niceta di Milano sottoscrive un biglietto di ll. 8400 in favore di Gerolamo, pagabile il 1° dicembre 1875. Si formoli questo biglietto.

758. Fare un mandato commerciale in favore di Agostino da Ginevra per la somma di ll. 600,

759. Una lettera di cambio di 6000 ducati vien tratta il 25 maggio a Venezia da Ottavio sopra Silvano da Napoli in favore di Vittore da Palermo, pagabile il 30 novembre per mercanzie ricevute. Essa ha avuto 4 girate, la 2ª da Bonifazio da Firenze, la 3ª da Bernardo da Roma e la 4ª da Severino da Napoli, ed è finalmente stata accettata il 30 novembre e pagata a Roberto.
Si formoli questa lettera.

§ 3° — CONTI CORRENTI.

691. — **I conti correnti** hanno per iscopo di presentare il ristretto di tutte le operazioni che hanno luogo fra due negozianti durante un dato tempo, e di determinare quanto l'uno debba all'altro, non solo considerando le somme che ciascun d'essi ricevette, ma ancora gli interessi delle medesime, de' quali i negozianti sono convenuti di tenersi scambievol conto.

Il *conto corrente* contiene dunque il prospetto delle somme ricevute o pagate da due negozianti, fissa la loro situazione reciproca dando il saldo definitivo che tocca all'uno od all'altro.

Questi conti sono disposti per **dare** (*) e per **avere**. Gli articoli concernenti il *dare* si scrivono sulla facciata sinistra, e quelli concernenti l'*avere* sulla destra.

692. — Il *banchiere* od il *negoziante* che rimette al suo corrispondente il conto di lui, scrive al *dare* tutte le somme che gli sono dovute da questo corrispondente, ed all'*avere* tutte quelle ch'egli deve al medesimo. Ciascun articolo deve racchiudere le cinque seguenti indicazioni:

1° La data del giorno nel quale si scrisse l'operazione.

2° La somma che forma l'oggetto dell'operazione.

3° La data in cui la somma venne pagata o ricevuta.

4° Il numero de' giorni compresi fra la ricevuta della somma e la chiusa de' conti.

5° Il prodotto della somma moltiplicata pei giorni (*numero*).

693. — Si chiama **saldo dei conti** la differenza fra il dare e l'avere; e se colui che si trova debitore non paga questa differenza, la si porta ad un nuovo conto corrente, di cui essa forma il primo articolo.

Per istabilire i conti correnti si conoscono vari metodi; noi esporremo qui sommariamente il più usitato.

694. — ***Metodo per istabilire un conto corrente.*** Supponiamo che il negozio di *Alberto da Torino* sia stato in relazione d'affari con quello di *Massimo da Genova* durante l'anno 1875, e che Massimo chiami ad Alberto il proprio conto corrente, chiuso il 10 novembre dello stesso anno coll'interesse 5 %. Supponiamo pure che le operazioni dei due negozi sieno le seguenti:

1° Il 20 maggio 1875 Alberto fece sopra Massimo una tratta di 8580 lire pagabili il 30 luglio seguente.

2° Il 2 luglio Alberto fece una rimessa a Massimo di 3400 lire per Genova pagabili l'8 agosto seguente.

3° Il 6 luglio Alberto ricevette una rimessa da Massimo di 2586 lire per Milano, pagabili il 27 agosto seguente.

4° Il 10 settembre Alberto fece a Massimo un invio di piastre, le quali al 15 del medesimo mese produssero netto a Genova 6585 lire.

5° Il 30 agosto Massimo fece ad Alberto una rimessa di 5440 lire per Torino, pagabili l'11 settembre.

6° Massimo trasse sopra Alberto per lire 7386 pagabili il 26 settembre seguente secondo l'avviso ricevuto il 16 settembre.

7° Il 10 ottobre Alberto trasse sopra Massimo per ll. 2490, pagabili al 1° novembre seguente.

8° Finalmente il 26 settembre Massimo trasse sopra Alberto un mandato di 1635 lire scadente il 3 ottobre seguente.

(*) In termine di commercio si chiama il DARE d'una partita ciò che deve una persona, e l'AVERE ciò che le è dovuto.

Si comincia dal rigare un foglio conforme al modello qui sotto, quindi si classificano gli articoli tanto al *dare* quanto all'avere secondo l'ordine, delle date in cui Alberto (che qui figura rimettere il conto a Massimo) registrò le operazioni ne' suoi libri. Poscia sul 1° articolo ragiono così:

Poichè Alberto fece una tratta di 8580 lire sopra Massimo, pagabile il 30 luglio, egli incassò a quest'epoca 8580 lire, perciò deve gl'interessi di tal somma fino al 10 novembre, cioè per 103 giorni. Massimo avendo *dato,* bisogna accreditare il suo conto. Pertanto dal lato *avere,* nella colonna segnata (1) pongo la data dell'operazione; in quella segnata (2) pongo la somma dell'operazione; nella colonna (3) l'epoca del ricevimento della somma; nella (4) il numero di giorni in cui fruisce della detta semma; e finalmente nella (5) il prodotto della somma pei giorni, ossia il *numero* (628).

Per gli articoli seguenti si opera nello stesso modo: nel 2° articolo Alberto dà a Massimo 3400 lire che questi percepisce l'8 agosto e delle quali fruisce gl'interessi di 94 giorni: si addebitò perciò Massimo.

Nel 3° articolo si accredita Massimo poichè fa una rimessa;

Col 4° articolo all'opposto Massimo è addebitato:

MASSIMO DA GENOVA suo conto corrente cogli inte

Dare

DATA (1)		SOMME (2)		OPERAZIONI	DATA delle scadenze (3)		Giorni (4)	NUMERI (5)
1875		Lire	c.					
Luglio	2	3400	»	Per M. R. per Genova	8	Agosto	94	319600
Settembre	10	6585	»	Per M. invio di piastre	15	Settembre	56	368760
Settembre	16	7386	»	Per S. T. sopra di me	26	Settembre	45	332370
Settembre	26	1635	»	Per S. M. sopra di me	3	Ottobre	38	62130
		19006	»	. . . . .	..	. . . .		1082860
		»	»	Per saldo dei numeri	..	. . . .		343640
		137	72	Per saldo in suo favore	10	Novembre		
		19143	72					1426500

Chiuso il presente conto, salvo errore od omissione di centotrentasette *lire* settandue *cent., della quale il suo conto*

Fatto a Torino, il 10 *novembre* 1875.

Col 5° articolo Massimo viene accreditato, e così dicasi degli altri.

Dopo avere in tal modo registrati tutti gli articoli del *dare* e dell'*avere*, si sommano da ambi i lati i *numeri* che si trovano nella colonna (5).

Al DARE, la somma dei numeri è . .	1082860.
All' AVERE, invece	1426500.
L'eccesso dell'*avere* sul *dare* è dunque	343640.

Si porta da prima questo *eccesso* al *dare* nella colonna dei numeri a fine di saldarla o bilanciarla, cioè rendere il totale del *dare* uguale a quello dell'*avere;* quindi si divide 343640 pel divisore fisso 7200 e si ottiene ll. 47,72 a favore di Massimo che portansi al suo *avere*: e finalmente si somma la colonna (2) indicante lire, tanto al *dare* quanto all'*avere;* e trovasi per somma totale

. . . . .	del *dare* ll.	19006.
. . . . .	dell'*avere* ll.	19143, 72
Donde si vede che l'eccesso dell'*avere* sul *dare* è ll.		137, 72

di cui Alberto si trova debitore verso Massimo: la qual somma, per saldare definitivamente il conto riguardante Massimo, dovrà esser portata al proprio *dare* e così tutte le colonne si troveranno bilanciate.

ressi 5 %, chiuso il 10 nov. con ALBERTO DA TORINO.

Avere

DATA (1)		SOMME (2)		OPERAZIONI	DATA delle scadenze (3)		Giorni (4)	NUMERI (5)
875		Lire	c.					
Maggio	20	8580	»	Per M. T. sopra di lui	30	Luglio	103	883740
Luglio	6	2586	»	Per S. R. per Milano	27	Agosto	75	193950
Agosto	30	5440	»	Per S. R. per Milano	11	Settembre	60	326400
Ottobre	10	2490	»	Per M. T. sopra di lui	1	Novembre	9	22410
		19096	»					1426500
		47	72	Per saldo del n° 343640 diviso per 7200.				
		19143	72					1426500

risulta che resta dovuto al sig. Massimo da Genova *la somma venne nuovamente accreditato, pagabile il* 10 *novembre* 1875.

Alberto.

quindi si classificano gli articoli tanto al *dare* quanto all'avere secondo l'ordine, delle date in cui Alberto (che qui figura rimettere il conto a Massimo) registrò le operazioni ne' suoi libri. Poscia sul 1° articolo ragiono così:

Poichè Alberto fece una tratta di 8580 lire sopra Massimo, pagabile il 30 luglio, egli incassò a quest'epoca 8580 lire, perciò deve gl'interessi di tal somma fino al 10 novembre, cioè per 103 giorni. Massimo avendo *dato*, bisogna accreditare il suo conto. Pertanto dal lato *avere*, nella colonna segnata (1) pongo la data dell'operazione; in quella segnata (2) pongo la somma dell'operazione; nella colonna (3) l'epoca del ricevimento della somma; nella (4) il numero di giorni in cui fruisce della detta semma; e finalmente nella (5) il prodotto della somma pei giorni, ossia il *numero* (628).

Per gli articoli seguenti si opera nello stesso modo: nel 2° articolo Alberto dà a Massimo 3400 lire che questi percepisce l'8 agosto e delle quali fruisce gl'interessi di 94 giorni: si addebitò perciò Massimo.

Nel 3° articolo si accredita Massimo poichè fa una rimessa;

Col 4° articolo all'opposto Massimo è addebitato:

Col 5° ar[illegible]

Dopo avere in tal modo regis[illegible] i *numeri* che si trovan[illegible] dell'*avere*, si sommano da ambi i lati nella colonna (5).

Al DARE, la somma dei numeri è . .	1082860.
All' AVERE, invece	1426500.
L'eccesso dell'*avere* sul *dare* è dunque	343640.

Si porta da prima questo *eccesso* al *dare* nella colonna dei numeri a fine di saldarla o bilanciarla, cioè rendere il totale del *dare* uguale a quello dell'*avere*; quindi si divide 343640 pel divisore fisso 7200 e si ottiene ll. 47,72 a favore di Massimo che portansi al suo *avere*: e finalmente si somma la colonna (2) indicante lire, tanto al *dare* quanto all'*avere*; e trovasi per somma totale

. . . . .	del *dare* ll.	19006.
. . . . .	dell'*avere* ll.	19143, 72
		137, 72

Donde si vede che l'eccesso dell'*avere* sul *dare* è ll. 137, 72 di cui Alberto si trova debitore verso Massimo: la qual somma, per saldare definitivamente il conto riguardante Massimo, dovrà esser portata al proprio *dare* e così tutte le colonne si troveranno bilanciate.

MASSIMO DA GENOVA suo conto corrente cogli interessi 5 %, chiuso il 10 nov. con ALBERTO DA TORINO.

Dare

DATA (1)		SOMME (2)		OPERAZIONI	DATA delle scadenze (3)		Giorni (4)	NUMERI (5)
1875		Lire	c.					
Luglio	2	3400	»	Per M. R. per Genova	8	Agosto	94	319600
Settembre	10	6585	»	Per M. invio di piastre	15	Settembre	56	368760
Settembre	16	7386	»	Per S. T. sopra di me	26	Settembre	45	332370
Settembre	26	1635	»	Per S. M. sopra di me	3	Ottobre	38	62130
		19006	»	. . . . .	..	. . . .		1082860
		»	»	Per saldo dei numeri	..	. . . .		343640
		137	72	Per saldo in suo favore	10	Novembre		
		19143	72					1426500

Avere

DATA (1)		SOMME (2)		OPERAZIONI	DATA delle scadenze (3)		Giorni (4)	NUMERI (5)
1875		Lire	c.					
Maggio	20	8580	»	Per M. T. sopra di lui	30	Luglio	103	883740
Luglio	6	2586	»	Per S. R. per Milano	27	Agosto	75	193950
Agosto	30	5440	»	Per S. R. per Milano	11	Settembre	60	326400
Ottobre	10	2490	»	Per M. T. sopra di lui	1	Novembre	9	22410
		19096	»					1426500
		47	72	Per saldo del n° 343640 diviso per 7200.				
		19143	72					1426500

Chiuso il presente conto, salvo errore od omissione risulta che resta dovuto al sig. Massimo da Genova *la somma di* centotrentasette *lire* settandue *cent., della quale il suo conto venne nuovamente accreditato, pagabile il* 10 *novembre* 1875.

Fatto a Torino, il 10 *novembre* 1875.

Alberto.

695. — Dal sin qui detto s'inferisce, che per appurare un conto corrente bisogna:

1° *Bilanciare le colonne dei numeri, portando la differenza tra le due somme dei medesimi nella parte che diede la somma minore.*

2° *Portare nella parte opposta e nella colonna delle lire il quoto risultante dalla divisione di questa differenza pel divisore fisso corrispondente alla tassa d'interesse.*

3° *Bilanciare la colonna delle lire portando la differenza tra le due somme dei capitali nella parte che diede la somma minore.*

Osservazione. — In pratica i negozianti non usano porre intestazione alle colonne.

Numeri rossi.

696. — Quando al momento della chiusa del conto, rimangono effetti, la cui scadenza succede dopo la data della chiusura, si calcolano da prima i giorni da questa data sino alla scadenza i

FILIBERTO DA SAVONA suo C. corrente, interesse 6 %

Dare

DATA		SOMME		OPERAZIONI	DATA delle scadenze		Giorni	NUMERI
1874		Lire	c.					
Agosto	10	266	55	Saldo dell'ult.° conto	10	Agosto	223	621(*)
Ottobre	1	300	»	Contanti a lui sborsati	1	Ottobre	181	543
Id.	15	302	»	id. id.	15	id.	167	504
Novembre	10	550	»	id. id.	10	Novembre	141	775
Id.	30	220	»	id. id.	11	Dicembre	110	242
Dicembre	12	298	50	id. id.	12	id.	109	325
		1937	05					3010
				Per saldo dei numeri rossi		. . .		301
		41	60	Per saldo del n° 2495				
		1978	65					3311

Chiuso il presente conto, salvo errore od omissione, risulta di cui il conto corrente del sig. Filiberto *è*

Asti, 31 *marzo* 1875.

(*) In questo conto abbiamo soppresse le ultime due cifre di ciascun *numero* aumentando però di un'unità l'ultima cifra conservata quando la seguente era maggiore di 5; e per compenso abbiamo preso per divisore fisso 60 invece di 6000

quali si scrivono con *inchiostro rosso*, come anche il *numero* corrispondente; si sommano separatamente i *numeri rossi*, ed il totale si scrive in nero nella parte opposta. Il seguente conto chiarirà il tutto.

La ragione per la quale si portano i numeri rossi nel lato opposto s'intende agevolmente. Supponiamo infatti, che avendo io aperto con Pietro un conto corrente, che chiudiamo il 30 aprile, ed egli mi abbia dato il 15 marzo un biglietto di 2000 ll. pagabili il 10 giugno. È cosa chiara che, se il conto fosse chiuso dopo il 10 giugno, io dovrei a Pietro l'interesse di 2000 ll. durante il numero de'giorni compresi dal 10 giugno alla chiusura dei conti. Ma poichè il conto e chiuso il 30 aprile, Pietro fruisce di detta somma da quest'epoca sino a quella in cui io dovrei percepirla, e conseguentemente egli mi deve l'interesse di 2000 ll. dal 30 aprile al 10 giugno, cioè durante 41 giorni. È dunque giusto che io l'addebiti di questo interesse.

Esempio. Supponiamo che Beltrami d'Asti chiuda il 31 marzo 1875 il conto di Filiberto di Savona, cogl'interessi del 6 %.

chiuso il 31 marzo 1875 presso BELTRAMI D'ASTI.

Avere

DATA		SOMME		OPERAZIONI	DATA delle scadenze		Giorni	NUMERI
1874		Lire	c.					
Ottobre	1	300	»	M. B. sopra di lui	20	Novembre	131	393
id.	10	168	»	S. R. sopra Martino	29	Ottobre	152	255
id.	10	119	50	S. R. sopra Teodoro	10	Novembre	141	168
Novembre	30	350	»	M. B. sopra di lui	20	Aprile	20	70(*)
Dicembre	12	298	50	S. R. sopra Paolo	1	Maggio	30	89
1875								
Marzo	27	200	»	M. T. sopra di lui	10	Giugno	71	142
		1436	»					816
				Per saldo dei numeri		. . .	....	2495
		542	65	Per saldo in mio favore				
		1978	65					3311

che mi è dovuto cinquecento quarantadue *lire*, sessantacinque *centesimi*, *addebitato a nuovo, pagabile il* 31 *marzo* 1875.

Beltrami.

(*) I numeri 70, 89 e 142 scritti nella 5ª colonna dell'**Avere** e soprassegnati da punti, debbono considerarsi come *numeri rossi*.

1° *Bilanciare le colonne dei numeri, portando la differenza tra le due somme dei medesimi nella parte che diede la somma minore.*

2° *Portare nella parte opposta e nella colonna delle lire il quoto risultante dalla divisione di questa differenza pel divisore fisso corrispondente alla tassa d'interesse.*

3° *Bilanciare la colonna delle lire portando la differenza tra le due somme dei capitali nella parte che diede la somma minore.*

Osservazione. — In pratica i negozianti non usano porre intestazione alle colonne.

Numeri rossi.

696. — Quando al momento della chiusa del conto, rimangono effetti, la cui scadenza succede dopo la data della chiusura, si calcolano da prima i giorni da questa data sino alla scadenza i giorni di cui il conto corrente deve essere addebitato o accreditato, e si moltiplicano questi giorni per le somme corrispondenti. Si ottengono così i numeri rossi, che si scrivono in rosso nella colonna dei numeri, e si sommano separatamente. Il seguente conto chiarirà il tutto.

La ragione per la quale si portano i numeri rossi nel lato opposto s'intende agevolmente. Supponiamo infatti, che avendo io aperto con Pietro un conto corrente, che chiudiamo il 30 aprile, ed egli mi abbia dato il 15 marzo un biglietto di 2000 ll. pagabili il 10 giugno. È cosa chiara che, se il conto fosse chiuso dopo il 10 giugno, io dovrei a Pietro l'interesse di 2000 ll. durante il numero de' giorni compresi dal 10 giugno alla chiusura dei conti. Ma poichè il conto e chiuso il 30 aprile, Pietro fruisce di detta somma da quest'epoca sino a quella in cui io dovrei percepirla, e conseguentemente egli mi deve l'interesse di 2000 ll. dal 30 aprile al 10 giugno, cioè durante 41 giorni. È dunque giusto che io l'addebiti di questo interesse.

Esempio. Supponiamo che Beltrami d'Asti chiuda il 31 marzo 1875 il conto di Filiberto di Savona, cogl'interessi del 6 %.

FILIBERTO DA SAVONA suo C. corrente, interesse 6 % — **chiuso il 31 marzo 1875 presso BELTRAMI D'ASTI.**

Dare — ***Avere***

DATA		SOMME		OPERAZIONI	DATA delle scadenze		Giorni	NUMERI
1874		Lire	c.					
Agosto	10	266	55	Saldo dell'ult.° conto	10	Agosto	223	621(*)
Ottobre	1	300	»	Contanti a lui sborsati	1	Ottobre	181	543
Id.	15	302	»	id. id.	15	id.	167	504
Novembre	10	550	»	id. id.	10	Novembre	141	775
Id.	30	220	»	id. id.	11	Dicembre	110	242
Dicembre	12	298	50	id. id.	12	id.	109	325
		1937	05					3010
				Per saldo dei numeri rossi				301
		41	60	Per saldo del n° 2495		. . .		
		1978	65					3311

DATA		SOMME		OPERAZIONI	DATA delle scadenze		Giorni	NUMERI
1874		Lire	c.					
Ottobre	1	300	»	M. B. sopra di lui	20	Novembre	131	393
id.	10	168	»	S. R. sopra Martino	29	Ottobre	152	255
id.	10	119	50	S. R. sopra Teodoro	10	Novembre	141	168
Novembre	30	350	»	M. B. sopra di lui	20	Aprile	20	70(*)
Dicembre	12	298	50	S. R. sopra Paolo	1	Maggio	30	89
1875								
Marzo	27	200	»	M. T. sopra di lui	10	Giugno	71	142
		1436	»					816
				Per saldo dei numeri		. . .	....	2495
		542	65	Per saldo in mio favore				
		1978	65					3311

Chiuso il presente conto, salvo errore od omissione, risulta di cui il conto corrente del sig. Filiberto *è che mi è dovuto* cinquecento quarantadue *lire*, sessantacinque *centesimi*, *Asti*, 31 *marzo* 1875. *addebitato a nuovo, pagabile il* 31 *marzo* 1875.

Beltrami.

(*) In questo conto abbiamo soppresse le ultime due cifre di ciascun *numero* aumentando però di un'unità l'ultima cifra conservata quando la seguente era maggiore di 5; e per compenso abbiamo preso per divisore fisso 60 invece di 6000

(*) I numeri 70, 89 e 142 scritti nella 5a colonna dell'**Avere** e soprassegnati da punti, debbono considerarsi come *numeri rossi*.

Articoli. 1° Il 10 agosto 1874 Filiberto si trova debitore di ll. 266,55 per saldo dell'ultimo suo conto.

2° Il 1° ottobre 1874 Beltrami sborsò a Filiberto 300 lire.

3° Il 1° ottobre Beltrami trasse sopra Filiberto altresì un B/ di 300 lire O/ Beltrami pagabile il 20 novembre 1875.

4° Il 10 ottobre Filiberto fece una rimessa di 168 ll. a Beltrami sopra Martino, pagabile il 29 ottobre.

5° Il 10 ottobre altra rimessa del medesimo al medesimo di lire 119,50 sopra Teodoro, pagabile il 10 novembre.

6° Il 15 ottobre Beltrami sborsò a Filiberto 302 lire.

7° Il 10 novembre Beltrami pagò 550 lire.

8° Il 30 novembre il medesimo promise lo sborso di 220 ll., le quali pagò il 10 dicembre seguente.

9° Il 30 novembre Beltrami trasse sopra Filiberto un B/ di 350 lire O/ Beltrami pagabile il 20 aprile 1874.

10° Il 12 dicembre Filiberto fece a Beltrami una rimessa di lire 298,50 sopra Paolo, pagabile il 1° maggio 1875.

11° Il 12 dicembre Beltrami sborsò in contanti lire 298,50.

12° Il 27 marzo 1875 Beltrami trasse sopra Filiberto un B/ di 200 ll. O/ Beltrami pagabile il 10 giugno seguente.

La somma dei numeri rossi dell'*avere* diede 301 che si portò al dare. Avvertasi poi che nel sommare i numeri dell'*avere* non si contarono più i rossi.

Prese queste due precauzioni, pel rimanente del conto, si opera come negli altri.

Esercizi sui Conti correnti.

760. Sia proposto di stabilire il conto d'interesse al 5 %, che Lorenzo di Ginevra aprì a Gregorio di Ciamberì per le somme che mutuamente si sono fornite od imprestate dal 1° gennaio al 1° luglio 1866.

Articoli. 1° Il 2 gennaio Lorenzo fece una tratta di ll. 7000 sopra Gregorio, scadente il 18 marzo.

2° Il 17 gennaio Gregorio ricevette in contanti, per conto di Lorenzo, dai sigg. Trona fratelli, ll. 4000.

3° Il 2 febbraio Gregorio ricevette ll. 5000 in danaro da Marcello, che glielo inviò per ordine di Lorenzo.

4° Il 6 marzo Gregorio fece una tratta a vista di 7000 lire sopra Lorenzo che questi sborsò il 23 alla presentazione della medesima.

5° Il 15 marzo Gregorio ricevette da Lorenzo una rimessa di 3000 lire per Ciamberì pagabile il 2 aprile.

6° Il 30 marzo Gregorio ricevette pure da Lorenzo una rimessa di 5000 lire per Ciamberì pagabile il 17 di aprile.

7° Il 21 aprile Gregorio ricevette una rimessa di 4000 lire per Ciamberì, pagabile il 7 maggio.

8° Il 1° maggio Lorenzo fece una tratta su Gregorio O/ Bernardo di 3000 lire, che Gregorio pagò il 1° giugno.

9° Il 20 maggio Gregorio fa a Lorenzo una rimessa per Ginevra di 1800 lire, che questi incassò il 5 giugno.

10° il 21 maggio Lorenzo fece sopra Gregorio una tratta di 1000 lire, O/ Stanislao, che ne ricevette il montare il 10 giugno.

11° Il 1° luglio Lorenzo ricevette in contanti 1000 lire.

761. Rodolfo di Biella chiede a Filippo di Susa il suo conto corrente degl'interessi al 5 % delle transazioni commerciali, che ebbero luogo fra loro dal 1° marzo sino alla fine di novembre 1866.

ARTICOLI. 1° Il 3 marzo Rodolfo spedisce a Filippo 30 balle di canapa, a lire 150 ciascuna, pagabili a contanti.

2° L'8 marzo Rodolfo dà ordine a Filippo di pagare 500 lire per conto suo a Giordano.

3° L'8 aprile, tratta di Filippo sopra Rodolfo di lire 1000, ordine Giovanni, pagabile il 6 giugno.

4° Il 19 aprile Rodolfo spedisce a Filippo 300 metri di tela a ll. 2,50 il metro, pagabile fra 60 giorni.

5° Il 3 maggio Filippo trae una lettera di cambio sopra Rodolfo di 1500 lire, pagabile il 30 luglio.

6° Il 25 maggio Filippo fa a Rodolfo le seguenti rimesse:

1° B/ di Benigno di ll. 1800, pagabile il 25 giugno;

2° B/ di Teodoro di ll. 2000, pagabile il 30 giugno;

3° B/ di Leonardo di ll. 500, pagabile il 6 agosto.

7° Il 6 luglio Rodolfo riceve l'invio di piastre per ll. 2500, che Filippo gli aveva spedito il 12 maggio.

8° il 13 giugno Filippo spedisce a Rodolfo 1500 quintali metrici di carbone a lire 4 i 100 chilogr., pagabili il 1° settembre.

9° Il 6 agosto T/ di Filippo sopra Rodolfo di ll. 3500, O/ Fioriti, pagabile il 30 ottobre.

10° Il 24 ottobre Rodolfo paga ll. 1200 a Diego O/ Filippo.

11° Il 13 novembre Rodolfo incassa una cambiale di ll. 2500, ordine Filippo che questi gli ha ceduto.

762. Stabilire il conto corrente di Remigio di Torino per affari ch'ei fece con Candido di Milano dal 1° giugno fino al 30 di ottobre seguente, calcolando gl'interessi al 6 %.

1° L'11 giugno Remigio pagò 2500 lire per conto ed ordine Candido.

2° L'11 giugno Candido spedì a Remigio 25 pacchi di seta a 200 lire l'uno, a 30 giorni di respiro.

3° Il 17 giugno Candido manda a Remigio due rimesse, l'una di 3200 ll. sopra Placido pel 10 luglio; e l'altra di 3000 ll. sopra Brunone pel 16 agosto.

4° Il 4 luglio Remigio spedisce a Candido 24 pezze di panno ciascuna di 40 metri, a 15 ll. il metro, pagabili in contanti.

5° Il 26 luglio T/ di Remigio di ll. 2000 sopra Candido pel 31 agosto.

6° Il 6 agosto Candido trae una L/ di cambio sopra Remigio di 3000 lire pagabile il 25 ottobre.

7° Il 24 agosto Candido invia a Remigio 80 casse di sapone a ll. 30 caduna, a 60 giorni di respiro.

8° Il 15 settembre Candido dà ordine a Remigio di pagare per suo conto a Gregorio 3000 lire il 5 ottobre.

9° Il 30 settembre T/ di Remigio sopra Candido di ll. 1500, pagabile il 16 novembre.

10° Il 10 ottobre Candido riceve da Remigio gli effetti seguenti:

1° B/ di 2000 ll. di Pietro pel 15 dicembre;
2° B/ di 2400 ll. di Saturnino per l'8 novembre;
3° B/ di 1200 ll. di Damaso pel 30 ottobre;
4° B/ di 600 ll. di Faustino pel 25 ottobre.

11° Il 18 ottobre Remigio dà avviso a Candido che Faustino si presenterà al suo negozio il 29 corrente, al quale esso Candido dovrà sborsare 3800 lire.

12° Il 25 ottobre T/ di Remigio sopra Candido di 3500 lire pel 30 dicembre.

763. Stabilire il conto d'interesse che Luciano di Vercelli ha con Clemente di Nizza, chiuso il 30 luglio 1866, cogl'interessi del 6 %.

1° Il 28 gennaio Luciano spedisce a Clemente 4 balle di tela d'Olanda, montante, secondo la fattura, a 3450 ll. pagabili il 30 aprile.

2° Il 5 marzo Clemente fa una rimessa di 1800 ll. a Marcello per ordine di Luciano.

3° Il 15 marzo Luciano dà a Saturnino di Novara per conto e per ordine di Clemente 100 botti di vino, il cui ammontare netto è di ll. 9800, pagabili il 15 giugno.

4° Il medesimo giorno Luciano tira una lettera di cambio di 3780 lire sopra Clemente, pagabile il 20 marzo.

5° Il 25 marzo Clemente fa a Luciano le rimesse seguenti:

1ª Un B/ di Nicola di 300 ll., pagabile il 30 marzo;
2ª Un B/ di Simone di 840 ll., pagabile il 26 marzo;
3ª Una T/ a vista di 1500 ll. sopra Matteo, che questi paga il 15 aprile;
4ª Una T/ di 1860 ll. sopra Bernardo, pagabile il 20 detto.

6° Il 3 aprile Luciano sborsa in contanti 500 lire a Luigi per ordine e conto di Clemente.

7° Il 15 aprile Clemente fornisce una T/ di 650 lire sopra Luciano, pagabile il 30 corrente.

8° Il 5 maggio Clemente riceve le seguenti rimesse da Luciano racchiuse nella sua lettera del 1°, cioè:

1° Un B/ di Casimiro, ordine Luciano di 1800 lire, pagabile il 23 maggio;
2° Una T/ sopra Leone di 2950 ll. scadente il 30 maggio;
3° 3750 ll. in contanti ricevute da Valentino il 5 maggio.

9° Il 20 maggio Clemente salda una T/ di 500 lire, che Luciano aveva tirata sopra di lui il 10.

10° Il 3 giugno Clemente riceve da Luciano gli effetti seguenti per Nizza, che gli incassò:

1° Un B/ di 400 ll. sopra Vittorio, pagabili il 30 giugno;
2° id. 750 ll. sopra Giulio, id. id.
3° id. 1500 ll. sopra Basilio, id. id.

11° Il 10 giugno Luciano trae sopra Clemente per ll. 3000, pagabili il 20 agosto.

12° Il 3 luglio Clemente scrive a Luciano di ricevere 1200 lire che Nestore gli deve, e che questi gli sborsa il 10 corrente.

13° Il 20 luglio Luciauo spedisce a Clemente un invio ascendente, secondo fattura di quel giorno, a ll. 1207 pagabili il 15 settembre.

14° Il 30 luglio Luciano dà in contanti a Firmino 1800 lire, giusta l'ordine di Clemente del 13.

§ 4° — COMPERE E VENDITE,
Profitti e Perdite, Commissioni,

697. — ***Compere e vendite.*** Dicesi **compera** l'atto con cui si chiede un oggetto al possessore coll'offerta di un compenso. La cessione fatta dal possessore dell'oggetto domandato pel compenso offerto dicesi **vendita.**

Le compere e le vendite si fanno *su piazza*, cioè nella città stessa abitata dal commerciante; ovvero *fuori piazza*, cioè in luoghi differenti.

Nel rimettere la merce, il venditore consegna al compratore una *nota* o **fattura** la quale indica la specie della merce venduta, il suo peso, la somma dovuta, l'epoca del pagamento e tutte le condizioni della vendita.

Modulo di Nota o Fattura di vendita su piazza.

Milano, 6 giugno 1875.

Deve il signor *Andrea Girini* a *Girolamo Bernasconi* per vendita e consegna a lui fatta di quanto segue:

65 botti vino nostrale comune a ll. 60 la botte . . . L. 3900

Pagabili metà a pronti contanti, e metà alla fine del mese.

693. — Il pagamento quando si fa in denaro nell'atto della vendita si dice *a contanti*, se invece vien differito si dice *a respiro*, *a credenza*, *a termine* o *a mora*.

699. — Allorchè invece di pagare la merce in danaro, si dà in compenso altra merce, l'operazione dicesi **baratto** o **permuta.**

700. — ***Profitti e perdite,*** ossia *regola del cento e del mille.* Nelle varie operazioni commerciali, come vendite, compere, baratti, ecc., è necessario che il venditore e il compratore conoscano il risultato delle loro transazioni, vale a dire, se hanno gnadagnato o perduto. Ora, la perdita od il guadagno può essere *assoluto* o *relativo.* È *assoluto* quando non si cerca che la pura differenza fra il prezzo di compra e di vendita; è *relativo* invece, quando si vuole conoscere il profitto o la perdita secondo un *tanto* convenuto. Il tanto a cui per lo più si riferiscono le negoziazioni, è 100 ovvero 1000.

Esempio. — Una pezza di satino di 40 metri costa 260 lire; a quanto devesi vendere il metro per guadagnare 20 % sul prezzo di costo?

$100 : 20 :: 260 : x =$ ll. 52, benefizio sulla pezza.
$260 + 52 =$ ll. 312, prezzo di vendita della pezza.
$\frac{312}{40} =$ ll. 7,80, prezzo di vendita del metro.

701. — ***Commissione.*** Dicesi **commissionario** colui che a nome proprio, od a nome sociale, opera per conto altrui, o per comperare o vendere mercanzie; o per pagare o riscuotere somme. Quegli pel conto del quale questi opera, dicesi **committente.**

Si chiama **sensale** o **mediatore** colui che s'intromette per la compera o la vendita d'una merce, ovvero per la conclusione di qualsivoglia negoziato.

702. — Chiamasi **commissione** o **senseria** il compenso dovuto al commissionario od al sensale per le loro operazioni. Questo compenso prende il nome di *provvigione* quando viene conceduto per la negoziazione di effetti di commercio. La commissione e la senseria si calcolano a 1, 2, 3, ½, ¼ . . . % sul valore della merce.

Problemi

sui Profitti, sulle Perdite e sulle Commissioni.

764. Federico vendè 800 Cg. di zuccaro a ll. 98 ogni 100 Chilogr.; sapendo che egli guadagnò 20 %, dicasi il prezzo di compra.

765. Quanto guadagnasi per cento vendendo a ll. 16,50 il m. una stoffa pagata ll. 14,55?

766. Una pezza di panno pagata ll. 11,30 il m. si dovette cedere a ll. 10,35; a quanto per cento monta la perdita?

767. Venanzio, che perdè 4 1/4 % sur una compra di tela d'Olanda, ebbe ll. 684 di perdita totale; quanto aveva pagata la tela?

768. Pagai ll. 540 per 675 Cg. di sapone e voglio guadagnare il costo di 65; quanto dovrò io vendere il tutto?

769. Volendo guadagnare 60 ‰ sopra tabacco del Brasile pagato ll. 2,80 il Cg., quanto debbo rivenderlo?

770. Quanto guadagnasi per mille ll. nel rivendere, a ll. 6,95 ogni 16 dozzine, le uova pagate 40 cent. la dozzina?

771. Sulpizio scambia 540 Cg. di zuccaro da ll. 2,50 con 30 casse d'arance; quanto gli costa ogni cassa?

772. Teopisto baratta 320 m. di tela da ll. 1,50 il m. con raso da ll. 7,50; quanti metri dev'egli riceverne?

773. Scambiando 15 Cg. di cocciniglia da ll. 180 il Cg. con 500 Dl. di grano, quanto mi costa il decalitro?

774. Icilio vuol permutare carta da ll. 9,50 la risma con pepe da ll. 2,20 il Cg.; quanto pepe riceverà per 12 risme di carta?

775. Permutaronsi prati da ll. 1000 l'ara con vigne da ll. 700; ma l'ara del prato fu stimata ll. 1200, e quella della vigna ll. 800. Chi guadagnò?

776. Il mio commissionario mi comprò per ll. 13250 di grano; quanto gli debbo di commissione pattuita a 2 %?

777. Feci comprare fuor di piazza, con 1/4 % di commissione, 100 balle di cotone a ll. 75 il quintale metrico; a quanto monta la spesa, se ogni balla pesa Cg. 80?

778. Simone comperò ll. 3005 di rendita 5 % *al corso* 122,50, e pagò 1 % per le spese di compra; quanto spese?

779. A quanto monta la commissione di ll. 18580 al 1,50 %?

780. Dalla vendita d'una casa si ricavò ll. 18050, dedotta la commissione a 3/4 %; quanto fu stimata la casa, e quanto percepì il commissionario?

781. Un commesso viaggiatore riceve 12 ll. il dì oltre 2 1/2 % sopra ogni vendita ch'ei fa; quanto riceverà egli in 6 mesi, posto che venda per ll. 15730?

§ 5° — ASSICURAZIONI,

Avarie, Tara, Trasporto delle Merci.

703. — ***Assicurazioni.*** L'*assicurazione* è quel contratto col quale uno o più individui si obbligano verso uno o più altri mediante un convenuto prezzo, di riparare i danni che potrebbero cagionare certi accidenti fortuiti.

L'assicurazione è **marittima** o **terrestre.**

I rischi contro i quali l'assicuratore marittimo guarentisce l'as-

sicurato sono quelli di tempesta, di folgore, di naufragio, di perdita totale della nave, ecc.

Varie sono le specie di assicurazioni terrestri.

Hannovi *assicurazioni contro gl'incendi*, *assicurazioni sulla vita*, *assicurazioni di rendite*, *di pensioni*, *di capitali*, *assicurazioni contro le epizoozie*, *ecc.*

704. — Si chiama **assicuratore** quegli che entra mallevadore dei rischi, ed **assicurato** quegli per cui malleva. Il prezzo o tanto che l'assicuratore esige dall'assicurato si chiama **premio**. Esso debb'essere pagato anticipatamente.

Il premio si pattuisce in ragione di un tanto per *mille* sulla somma assicurata se l'assicurazione è terrestre, ed in ragione di un tanto per *cento* se l'assicurazione è marittima.

705. — Il contratto o documento che la Compagnia rilascia all'assicurato si chiama **polizza**.

I contratti d'assicurazione si fanno per mezzo de'*sensali d'assicurazione*. Il compenso a cui essi hanno diritto per l'opera loro è fissato ad un *tanto* per 100, non già sul valore della cosa assicurata, ma sull'ammontare del premio stesso d'assicurazione.

706. — ***Prestito a cambio marittimo.*** Il prestito *a cambio marittimo* o *a tutto rischio*, detto anche *a grossa ventura*, è quel contratto per cui s'impresta una somma sopra oggetti o merci esposti ai rischi del mare, colla convenzione che se per accidenti marittimi si perdono in tutto od in parte o sono deteriorati, il mutuante perda il suo denaro e ricuperi soltanto il prezzo che dai medesimi si può ricavare; se invece arrivano a buon porto, non solo ripiglia il suo capitale, ma ottenga altresì una somma convenuta a titolo d'interesse.

707. — Quegli che riceve una somma messa a rischi si chiama *prenditore;* colui che la dà *datore* o *mutuante*, e *profitto marittimo* o premio il guadagno che si fa dal mutuante se la nave giunge a felice arrivo.

I titoli di questi prezzi possono essere inscritti al portatore e negoziarsi come le cambiali.

708 — ***Avarìe.*** Chiamasi *avarìa* qualunque specie di danno imprevisto che accade ad una nave per effetto della navigazione.

L'avarìa può venir considerata sotto due aspetti: l'uno riguardo ai danni sofferti dalle merci, e l'altro rispetto alle spese fatte per la conservazione delle merci o per la conservazione comune, ecc.

Quest'ultima specie d'avarìa si divide in due: *avarìa semplice* o *particolare*, e *avarìe grosse* o *comuni*.

709. — Si chiamano **avarìe grosse** o **comuni** i danni sofferti volontariamente, e le spese fatte dopo deliberazioni prese pel bene e per la salvezza comune della nave e delle merci, dopo il caricamento e la partenza fino al ritorno ed allo scaricamento.

Le avarìe comuni sono a carico delle merci e della metà del bastimento e del nolo, in proporzione del valore.

710. — Per **avarie semplici** o **particolari** s'intendono tutte le spese fatte ed il danno sofferto pel bastimento solo, o per le merci sole, dopo il caricamento e la partenza fino al ritorno ed allo scaricamento.

Le avarie particolari sono sopportate e pagate dal proprietario della cosa che ha sofferto il danno o dato occasione alla spesa.

711. — Si chiama *capitano* quegli che amministra la nave, *caricatore* o *armatore* colui che è interessato nel carico della medesima per qualsivoglia somma; *locatore* o *noleggiatario* o *proprietario* quegli a cui appartiene, od è considerato appartenere il bastimento, e *conduttore* o *noleggiatore* colui che lo prende a nolo.

712. — ***Tara.*** Chiamasi *tara* il peso di ciò che racchiude la merce; come barili, casse, ecc. Togliendo la tara dal peso totale, detto **lordo,** si ottiene il peso **netto.**

713. — In commercio si conoscono tre specie di tara, cioè: *reale, fissa* e *percentuale.*

È **reale** o **vera** quella che consiste nella cosa che costituisce la tara, come sarebbero invogli, casse, ecc. È **fissa** o **stabile** se si calcola ad un tanto per balla, per sacco, o per cassa. È **percentuale** quando è stabilita ad un tanto per cento sul peso, sulla quantità, o sulla misura della merce stessa.

714. — ***Trasporto delle merci.*** Le spese di trasporto delle merci per terra o per mare sono regolate ad un tanto per 50, per 100, ovvero per 1000 chilogrammi, secondo la distanza dei luoghi, e la natura dei pericoli.

715. — Chi manda le mercanzie dicesi *spedizioniere;* quegli che s'incarica di farle trasportare *commissionario di trasporto;* quegli che le trasporta *vetturale* (capitano, patrone); e colui al quale debbono essere recapitate *consegnatario.*

716. — Le condizioni di trasporto ed il tempo in cui le merci debbono essere recapitate al consegnatario, si regolano con apposito contratto, il quale dicesi **lettera di vettura,** se il trasporto si fa per terra; e **polizza di carico,** se per via di mare.

717. — La *lettera di vettura* deve: 1° Portare la data, enunciare la natura, il peso o la misura degli oggetti da trasportarsi, il termine entro cui il trasporto debb'essere effettuato; 2° Indicare il nome ed il domicilio del commissionario, qualora ve ne sia uno, per interposizione del quale si opera il trasporto, il nome e domicilio di colui a cui la merce dev'essere recapitata, il nome e domicilio del vetturale; 3° Specificare il prezzo della vettura, ed il risarcimento dovuto in caso di ritardo; 4° Essere sottoscritta dallo spedizioniere o dal commissionario e portare in margine le marche e i numeri degli oggetti da trasportare; 5° Finalmente debb'essere su carta bollata.

Il vetturale è mallevadore della perdita degli oggetti da trasportare, salvo i casi di forza maggiore. Egli è altresì mallevadore delle avarie, da quelle in fuori che dipendono da vizio inerente alla cosa o da forza maggiore.

Modulo di Lettera di vettura.

Prezzo di trasporto L. 27,60.
Bollo . . . . . » 0,75.
L. 28,35.

Marca	Num.	Indicazione	Peso
S. T.	110	Sacchi 10	Cg. 690

Al Sig. G. CORDINI
CHIAVARI.

Per mezzo del vetturale *Giacomo Pini* da Rivarolo, vi spedisco 10 sacchi di caffè del peso complessivo di Cg. 690; marcati e numerati come in margine, e ricevendoli intatti nello spazio di due giorni sotto pena della perdita del terzo del prezzo convenuto di vettura, glielo pagherete a ragione di lire quattro ogni 100 Cg. senza però ch'egli sia mallevadore dei danni causati da forza maggiore.

Vi saluto cordialmente.

L. PARODI.

718. — ***Osservazione.*** La ricevuta degli oggetti trasportati ed il pagamento del prezzo di vettura tolgono al consegnatario ogni diritto di ricorso contro il vetturale. Quindi chi trovasse le sue merci in cattivo stato nell'atto della consegna, oppure fossero in ritardo, non le deve accettare, ma farle all'uopo verificare da periti nominati dal presidente del Tribunale di commercio, oppure dal giudice di mandamento; ed ove questa verificazione portasse lungo spazio di tempo, si potrà ordinarne il deposito od il sequestro.

Modulo di Polizza di carico.

MARCA
S. R. O.

Nº 1 a 20

20 BOTTI
olio sopraffino

CAPACITÀ
Tonnellate 320

NOLO ll. 3200

Genova, 18 maggio 1875.

Il signor *Cesare Novina* ha caricato oggi in questo porto per conto e rischio di chi spetta, sulla goletta di bandiera italiana, LA VELOCE, di tonnellate 400, comandata dal comandante sottoscritto, le merci notate qui contro, asciutte, intere, ben condizionate e numerate come nel margine, per essere condotte in questo presente viaggio nella stessa condizione a *Le Havre* e consegnarsi al Signor *Morand*, o chi per esso. Di nolo saranno pagate ll. 10 ciascuna tonnellata, ed in obbligo di ciò il capitano ha sottoscritto questa ed altre simili da valere ad un solo effetto.

Il Caricatore
CESARE NOVINA.

Il Capitano della Veloce
ORAZIO MARINI.

Problemi

sulle Assicurazioni, sulle Avarie, sulla Tara e sul Trasporto delle merci.

782. Un opificio stimato ll. 22450 è assicurato a ll. 1,50 $^{00}/_{00}$; quanto riceve la Società assicuratrice?

783. Quanto pagherassi per l'assicurazione al 10 $^{0}/_{0}$ d'una merce esposta ai rischi del mare, se venne stimata ll. 75000?

784. A quanto monta la malleveria di ll. 8785,95 all'1 $^{1}/_{2}$ per 100?

785. Un assicuratore ricevette ll. 985,95 per malleveria al 6 $^{0}/_{0}$; trovisi la somma assicurata.

786. Lire 70000 vennero assicurate per ll. 420, e ll. 50000 per ll. 250; quale dei due prezzi d'assicurazione fu maggiore, e di quanto per 100?

787. Sopra una merce stimata ll. 2500, ed assicurata a $^{1}/_{2}$ $^{0}/_{0}$, v'ebbero 34 ll. di danno; qual guadagno fecero gli assicuratori?

788. A quanto monta il guadagno fatto sopra ll. 124750 esposte ai rischi marittimi, ove si diano ll. 16,75 $^{0}/_{0}$?

789. Al ritorno d'un bastimento ricevo ll. 8500 per assicurazione al 10 $^{0}/_{0}$ d'una merce esposta a' rischi della navigazione; qual n'era il valore?

790. Quanto fu il prestito a cambio marittimo, se ricevonsi ll. 10500 per interesse 30 $^{0}/_{0}$?

791. Un negoziante riceve ll. 62500 per 50000 ll. che aveva esposte a' rischi marittimi; qual n'era l'interesse per 100?

792. Un bastimento, il cui carico è valutato 450000 ll., fece per ll. 45000 d'avarìe; qual fu la perdita per 100?

793. Se sul medesimo bastimento qualcuno avesse caricato per 65000 ll., qual sarebbe stata la sua perdita?

794. Apuleio entrava per ll. 1800 nel carico d'una nave, di cui il mal tempo guastò le merci sì, che appena se ne ritrasse il 60 $^{0}/_{0}$; quanto riceverà egli?

795. Il carico d'un naviglio giunto in porto vale ll. 450000: il 1° caricatore vi entra per ll. 150000, il 2° per ll. 200000, ed il 3° pel resto, Il naviglio vale ll. 90000, il nolo importa 18000 ll., e vi ebbe per ll. 175500 di grossa avarìa: chi deve sopportarla e quanto per ciascuno?

796. Un naviglio fatto prigione da corsari, può ricuperarsi mediante 400000 ll.; chi dovrà sopportare la spesa, e quanto per ciascuno, sapendo che il vascello è stimato ll. 100000, le merci di due caricatori ll. 250000 e ll. 150000, ed il nolo è ll. 100000?

797. Quanto pagherassi per 3 casse di merci pesanti in tutto 3400 Cg., ove si diffalchino *per cento* 5 Cg. di tara e 2 pel buon peso, e si paghi ll. 1,75 il Cg. netto?

798. Si comprano 2000 Cg. di zuccaro a ll. 0,80 il Cg.; quanto si pagherà deducendo 10 $^{0}/_{0}$ di tara?

799. Falerio comprò a ll. 5,40 il Cg. netto 3 balle di chiodi di garofano, pesanti: la 1ª 226 Cg. lordo e 10 Cg. di tara
la 2ª 420,50 » 12 ½ »
la 3ª 387,50 » 11 ½ »
Quanto dovrà egli pagare?

800. Quanto pagherassi ad un vetturale pel trasporto di 6954 Cg. di merci a ll. 9,50 ogni 50 chilogrammi?

801. Se il trasporto da Milano a Lione costa ll. 8 per 100 Cg.. quanto converrà pagare per 4250 chilogrammi?

802. Quando pel trasporto a 30 Mm. di distanza pagasi ll. 6,50 per 1000 Cg., quanto si pagherà egli per 37000 Cg. a 12 miriametri?

CAPO III.

REGOLE DI RIPARTIZIONE, DI SOCIETÀ, DI MISCUGLIO, ECC.

§ 1° — REGOLA DI RIPARTIZIONE PROPORZIONALE.

719. — La **regola di ripartizione proporzionale** è quella per cui si scompone un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati.

Queste parti possono essere:
Direttamente proporzionali ai numeri dati;
Inversamente proporzionali ai numeri dati;
In ragione *composta diretta* con due o più specie di numeri dati;
In ragione *composta diretta* con numeri dati ed *inversa* con altri numeri pur dati.

720. — ***Ripartizione direttamente proporzionale.*** Proponiamoci di scomporre il numero N in 4 parti direttamente proporzionali ai numeri a, b, c, d.

Rappresentando le parti richieste con x, y, z, v, si ha $x+y+z+v=N$; e perchè siano direttamente proporzionali ad a, b, c, d, si debbono avere inoltre le proporzioni

$$a : x :: b : y; \qquad b : y :: c : z; \qquad c : z :: d : v.$$

Ora queste proporzioni, avendo un rapporto comune, danno

$$(z) \qquad a : x :: b : y :: c : z :: d : v;$$

Donde si ricava (606), ponendo N invece di $x+y+z+v$,

$$a+b+c+d : N :: a : x :: b : y :: c : z :: d : v.$$

Dunque per ripartire un numero in parti direttamente proporzionali a numeri dati, bisogna stabilire questa proporzione:

La somma dei numeri dati sta al numero da ripartirsi, come ciascun numero dato sta alla relativa parte.

Esempio. Un ricco proprietario lascia, morendo, 40000 lire da dividersi fra i tre ospedali della sua città in proporzione del numero dei letti. Ora sapendo che il 1° ne conta 220, il 2° 150, ed il 3° 130, si domanda quanto riceverà ciascun ospedale.

Si ha: $220 + 150 + 130 = 500$, e quindi

$$500 : 40000 :: \begin{cases} 220 : x = \text{ll. } 17600, & \text{quota del } 1^\circ \text{ spedale} \\ 150 : y = \text{ll. } 12000, & \text{» } \quad 2^\circ \quad \text{»} \\ 130 : z = \text{ll. } 10400, & \text{» } \quad 3^\circ \quad \text{»} \end{cases}$$

Verificazione ..... ll. 40000.

721. — ***Ripartizione inversamente proporzionale.*** Abbiasi da scomporre il numero N in 4 parti inversamente proporzionali ai numeri a, b, c, d.

Siano x, y, z, v le parti richieste; affinchè siano inversamente proporzionali ai numeri dati fa d'uopo che si abbiano le tre proporzioni $b : x :: a : y$; $c : y :: b : z$; $d : z :: c : v$.

Ora, se in ciascuna di queste proporzioni si divide il medio e l'estremo cognito pel prodotto dei medesimi, esse diventano:

$$\frac{1}{a} : x :: \frac{1}{b} : y; \quad \frac{1}{b} : y :: \frac{1}{c} : z; \quad \frac{1}{c} : z :: \frac{1}{d} : v;$$

e queste, avendo un rapporto comune, danno

$$(\beta) \quad \frac{1}{a} : x :: \frac{1}{b} : y :: \frac{1}{c} : z :: \frac{1}{d} : v.$$

Confrontando questa colla proporzione (α), si scorge che:

Per dividere un numero in parti inversamente proporzionali a numeri dati, bisogna dividerlo in parti direttamente proporzionali ai valori reciproci (335) *dei numeri dati.*

Esempio. Quattro proprietari A, B, C, D avendo patito gravi danni dallo straripamento d'un torrente, l'amministrazione comunale assegna un risarcimento di lire 12000, da ripartirsi in ragione inversa delle imposte di cui ciascuno è gravato. Si domanda quanto riceverà ogni proprietario, sapendo che A paga ll. 250 d'imposta, B ll. 320, C ll. 280 e D ll. 400.

Si ha per la somma dei valori reciproci dei numeri dati

$$^1/_{250} + {}^1/_{320} + {}^1/_{280} + {}^1/_{400} = {}^{739}/_{56000} \text{ e quindi:}$$

$$\frac{739}{56000} : 12000 :: \begin{cases} {}^1/_{250} : x = \text{ll. } 3637{,}35, & \text{parte di } A \\ {}^1/_{320} : y = \text{ll. } 2841{,}68, & \text{» } \quad B \\ {}^1/_{280} : z = \text{ll. } 3247{,}63, & \text{» } \quad C \\ {}^1/_{400} : v = \text{ll. } 2273{,}34, & \text{» } \quad D \end{cases}$$

Verificazione..... ll. 12000,00.

722. — ***Ripartizione in ragione composta diretta.*** Un facoltoso signore lascia per testamento una somma S da ripartirsi fra quattro suoi servi A, B, C, D in ragione diretta dell'età e degli anni di servizio. Ora le età essendo rispettivamente a, b, c, d, e gli anni di servizio m, n, p, q, si chiede qual parte della somma spetti a ciascun servo.

Rappresentiamo con x, y, z, v, le parti richieste; e chiamiamo u la parte che toccherebbe ad un altro servo M, la cui età fosse quella di A, cioè a, e gli anni di servizio quei di B, cioè n. I servi A e M avendo la stessa età, le loro quote x e u debbono essere in ragione diretta degli anni di servizio m e n; dunque $x : u :: m : n$. Similmente M e B avendo gli anni di servizio uguali, le loro quote u e y staranno come le età a e b; si ha pertanto $u : y :: a : b$. Queste due proporzioni moltiplicate termine a termine danno

$$(1) \qquad x : y :: am : bn.$$

Ammettiamo ora che il servo M, avendo sempre l'età di A, abbia per anni di servizio quei di C. Ragionando sopra A, M, C, come facemmo sopra A, M, B, si ottiene

$$x : u :: m : p \qquad \text{e} \qquad u : z :: a : c;$$

donde $$(2) \qquad x : z :: am : cp.$$

Finalmente, supponendo che M abbia per anni di servizio quei di D, si perviene a $$(3) \qquad x : v :: am : dq.$$

Le proporzioni (1), (2), (3) avendo gli stessi antecedenti, danno per ultimo $$(7) \qquad x : am :: y : bn :: z : cp :: v : dq.$$

Ciò dimostra che:

Per dividere un numero in parti che siano in ragione composta diretta con due specie di numeri dati, bisogna dividerlo in parti direttamente proporzionali ai prodotti che si ottengono moltiplicando rispettivamente il 1°, il 2°, il 3°..... dei primi numeri dati pel 1°, pel 2°, pel 3°..... dei secondi numeri dati.

Se vi fossero tre, quattro..... specie di numeri dati, ciascun prodotto avrebbe tre, quattro..... fattori.

Esempio. Le età dei servi siano: $a = 75$, $b = 60$, $c = 48$, $d = 30$; gli anni di servizio: $m = 56$, $n = 42$, $p = 30$, $q = 10$; e sia ll. 12000 la somma da dividersi. Si avrà:

$$75 \cdot 56 + 60 \cdot 42 + 48 \cdot 30 + 30 \cdot 10 =$$
$$4200 + 2520 + 1440 + 300 = 8460;$$

$$8460 : 12000 :: \begin{cases} 4200 : x = 5957{,}45 & \text{parte di } A \\ 2520 : y = 3574{,}47 & \text{» } B \\ 1440 : z = 2042{,}55 & \text{» } C \\ 300 : v = 425{,}53 & \text{» } D \end{cases}$$

Verificazione 12000,00

722 *bis*. — ***Ripartizione in ragione composta, diretta ed inversa.*** Per la costruzione d'un ponte sul fiume che attraversa il territorio di 5 comuni A, B, C, D, F, si richiede una somma S da pagarsi dai medesimi in ragione diretta della popolazione ed inversa della distanza dal ponte al centro di ciascun territorio. Si domanda quanto dovrà spendere ogni comune, se le rispettive popolazioni sono a, b, c, d, f, e le distanze m, n, p, q, r.

Siano x, y, z, v, t le spese richieste, e sia u quella che sostener dovrebbe un altro comune M, la cui popolazione fosse a, e la distanza fosse n. I comuni A e M avendo la stessa popolazione, le loro spese x e u saranno inversamente proporzionali alle distanze m e n; dunque (721) $x : u :: \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$.

Similmente M e B avendo le distanze uguali, si ha $u : y :: a : b$, e quindi $$x : y :: \frac{a}{m} : \frac{b}{n}.$$

Proseguendo, come nel n° precedente, a supporre la distanza di M successivamente uguale a quelle dei comuni C, D, F, e ragionando allo stesso modo, si ottengono 4 proporzioni; dalle quali, per l'identità degli antecedenti, risulta

$$(\delta) \qquad x : \frac{a}{m} :: y : \frac{b}{n} :: z : \frac{c}{p} :: v : \frac{d}{q} :: t : \frac{f}{r}.$$

Dunque:

Per dividere un numero in parti che siano in ragione composta, diretta con numeri dati ed inversa con altri numeri pur dati, bisogna dividerlo in parti direttamente proporzionali ai quoti che si ottengono dividendo rispettivamente il 1°, il 2°, il 3°... dei primi numeri dati pel 1°, pel 2°, pel 3°..... dei secondi numeri dati.

Esempio. — Le popolazioni dei comuni siano: $a = 10976$, $b = 11907$, $c = 3025$, $d = 2496$, $f = 7200$; le distanze in metri $m = 2016$, $n = 2700$, $p = 1089$, $q = 6591$, $r = 2592$, e sia ll. 800000 la spesa totale.

Dopo aver ridotte le frazioni ai minimi termini, si avrà:

$$^{49}/_{9} + {}^{441}/_{100} + {}^{25}/_{9} + {}^{64}/_{169} + {}^{25}/_{9} = {}^{2401461}/_{152100};$$

$$\frac{2401461}{152100} : 800000 :: \begin{cases} {}^{49}/_{9} : x = \text{ll. } 275865{,}40 \\ {}^{441}/_{100} : y = \text{ll. } 223450{,}97 \\ {}^{25}/_{9} : z = \text{ll. } 140747{,}65 \\ {}^{64}/_{169} : v = \text{ll. } 19188{,}33 \\ {}^{25}/_{9} : t = \text{ll. } 140747{,}65 \end{cases}$$

Verificazione ..... ll. 800000,00.

Osservazione. — Ai quattro modi di ripartizione sin qui dimostrati, un altro potevasi aggiungere, cioè la *ripartizione in ragione composta inversa*; e giusta l'ordine logico questo modo veniva dopo il n° 722. Ma non trovando esso guari appli-

cazione in aritmetica, daremo qui soltanto la proporzione relativa al medesimo; la quale si deduce come nei due casi precedenti. Eccola

$$(\varepsilon) \qquad x : \frac{1}{am} :: y : \frac{1}{bn} :: z : \frac{1}{cp} :: v : \frac{1}{dq}.$$

723. — ***Applicazione della regola di ripartizione.*** Questa regola trova l'applicazione sua principale nei vari rami di pubblica amministrazione, sopratutto nella ripartizione delle contribuzioni pubbliche e nel reclutamento dell'esercito.

Esempio. Il Governo, per urgente bisogno, dovendo imporre una contribuzione fondiaria di cui il valore è A, domandasi in qual modo debba farsi la ripartizione delle quote, e la riscossione.

Soluzione. Al ministero delle finanze si comincia dal far la ripartizione della somma A fra le varie provincie componenti il regno, *in proporzione* de' loro redditi.

Sia B la somma che una qualunque delle provincie deve pagare per la sua quota; questa provincia essendo divisa in certo numero di circondari, le cui rendite territoriali sono pure conosciute, si divide sul capo-luogo di provincia la somma B tra i circondari proporzionatamente alle loro rendite.

Sia ora C la somma di cui uno dei circondari venne tassato; questo circondario suddividendosi in parecchi mandamenti, si fa sul capo-luogo di circondario la ripartizione della quota C tra i medesimi proporzionatamente alle presunte loro rendite.

Sia D la somma di cui uno dei mandamenti venne tassato; questo suddividendosi in parecchi comuni, si fa sul capo-luogo di mandamento la ripartizione di questa somma in ragione delle loro rendite.

Sia E la somma di cui venne gravato uno dei comuni; questo comune si compone pure di certo numero di proprietà, sia in case, sia in terre, sia in prati, sia in boschi, le cui rendite sono già cognite; si ripartisce la contribuzione E fra i vari proprietari, proporzionatamente alle loro possessioni. Il che dà finalmente luogo ad un'ultima operazione della seguente specie:

Un comune la cui entrata territoriale monta a 52000 ll. venne tassato per 3900 ll.; si desidera conoscere la tariffa dell'imposta, cioè l'imposta di cui è tassata 1 lira, 2 lire, 3 lire.....

Poichè ll. 52000 sono tassate per... ll. 3900

1 lira sarà tassata per... $\frac{3900}{52000} =$ ll. 0,075

2 lire » » $2 \times 0{,}075 =$ ll. 0,15.

E così un individuo che avesse 3000 ll. di rendita verrebbe tassato per ll. $3000 \times 0{,}075 =$ ll. 225.

L'elenco delle contribuzioni di ciascun proprietario essendo

determinato, ciascun contribuente versa la sua quota tra le mani dell'esattore comunale, questi le riversa nella cassa dell'esattore mandamentale, il quale le spedisce all'esattore del circondario, quest'ultimo recapita il tutto all'esattore generale della provincia; il quale finalmente invia i suoi fondi alla tesoreria; e il Governo trovasi così aver percepito l'ammontare della contribuzione.

Problemi

sulla Regola di ripartizione proporzionale.

803. Erasmo, morendo, lascia 12600 ll. da ripartirsi fra 4 figliuoli proporzionalmente ai numeri 6, 5, 4, 3. Qual sarà la parte d'ognuno?

804. Un ricco signore vuol spartire ll. 2400 fra tre bisognose famiglie in proporzione dei membri che le compongono: quanto toccherà a ciascuna, se la 1ª conta 5 persone, la 2ª 7 e la 3ª 8?

805. Fiorenzo uomo caritatevole, ma che non sa di frazioni, mi consegnò ll. 12 da spartire tra 5 poveri, per modo che il 1° ne avesse $^1/_2$, il 2° $^1/_3$, il 3° $^1/_4$, il 4° $^1/_5$, il 5° $^1/_6$. Quanto debbo dare a ciascuno per adempiere le intenzioni del pio donatore?

806. Il generale d'un esercito vittorioso impose a 4 borgate una tassa di ll. 78540; quanto pagherà ciascuna in proporzione de' suoi abitanti, se la 1ª ne conta 350, la 2ª 240, la 3ª 540 e la 4ª 642?

807. Comprai quantità uguali di tre differenti lane, pagando la 1ª qualità ll. 9 il Chg., la 2ª ll. 6, la 3ª ll. 5, e spesi in tutto ll. 1800. Quanto sborsai per ciascuna qualità?

808. Dai registri d'un negoziante in fallimento consta, che l'attivo è solo 49 % del passivo, il quale ammonta a ll, 62585; tre creditori vi sono interessati il 1° per ll. 7048,60, il 2° per ll. 8960, ed il 3° per ll. 12430. Quanto riceverà ciascuno, se le spese del Tribunale montano a 6 $^1/_5$ % del passivo?

809. Tre studenti comprarono un globo celeste per lire 547,20; chiedesi quanto abbia speso ciascuno, sapendo che la posta del 1° sta a quella del 2° :: 7 : 9, ed a quella del 3° :: 3 : 4.

810. Un principe assegna 8400 ll., da ripartirsi fra 3 vecchi uffiziali in ragione della loro età: il 1° ha 62 anni, il 2° 68, il 3° 80. Quanto riceverà ciascuno, e quanto riceverebbe, se la ripartizione si facesse in ragione inversa delle età?

811. Voglionsi gratificare 4 operai dividendo fra loro lire 120 in ragione della loro assiduità; chiedesi quanto avrà ciascuno, sapendo che sopra 18 giorni di lavoro il 1° operaio si assentò 1 volta, il 2° 4, il 3° 5 ed il 4° 7.

812. Quattro lastre in marmo, pagate in ragione inversa dei numeri 1, $^5/_3$, $^{15}/_{14}$ e $^3/_2$, costarono ll. 1200; qual fu il prezzo di ciascuna?

813. La grandine avendo devastati 5 Comuni, il Governo assegna 200000 ll. da ripartirsi fra essi in ragione inversa delle imposte onde sono gravati. Quanto spetta a ciascuno, se il 1° paga annualmente 1000 ll., il 2° 1200; il 3° 1800, il 4° 2000, ed il 5° 2500?

814. Tre terreni d'ugual estensione, e le cui durezze stanno come $3\ ^1/_{16}$, $5\ ^{19}/_{25}$, $6\ ^1/_4$, son fatti dissodare ciascuno da un appaltatore: il 1° in 4 giorni, il 2° in 16, il 3° in 25. Se il proprietario paga ll. 400 per l'intero lavoro, quanto riceverà ciascun appaltatore in ragione diretta della durezza del suolo ed inversa del tempo impiegatovi?

815. A tre militari feriti, di cui il 1° ha 36 anni di servizio, il 2° 25, il 3° 16, viene assegnata una pensione totale di lire 2000 da spartirsi in ragione diretta degli anni di servizio ed inversa delle loro sostanze. Quanto riceverà ciascuno, ove il 1° possegga 8100 ll., il 2° 6400, il 3° 4900?

816. Un signore benefico lascia ll. 162365 da spartirsi fra 4 ricoveri, in ragione diretta delle persone soccorse, ed inversa delle entrate. Quanto spetta a ciascuno, se hanno rispettivamente,

ricoverati 90; 124; 196; 216,
e rendite: ll. 30250; 123039; 116281; 381024?

817. Con ll. 3000 comprai due cavalli, pagandoli in ragione diretta delle forze, le quali stanno $::121:144$, ed in ragione inversa delle età, che sono fra loro $::5\ ^4/_9 : 6\ ^1/_4$. Quanto mi costa ciascuno?

818. L'incendio avendo consumate le case di tre agricoltori, stimate la 1ª ll. 4000, la 2ª ll. 3600, la 3ª 4500, l'amministrazione comunale assegna ll. 10000 da ripartirsi fra essi in ragione diretta dei danni sofferti ed inversa delle loro possessioni, le quali montano, pel 1° a ll. 9000, pel 2° a ll. 6561, e pel 3° a ll. 11520. Quanto riceverà ciascuno?

§ 2° — REGOLA DI SOCIETÀ.

724. — In commercio per **società** s'intende la riunione di varie persone che mettono in comune danaro, merci od opera per ripartirsi il profitto o la perdita che potrà risultare dal traffico di tali cose (*).

(*) Si distinguonó tre specie di società commerciali: cioè: 1° la società in *nome collettivo*, formata da due o più persone trafficanti insieme a comune pericolo, sotto il nome di uno o più di loro, ossia sotto una *ditta* o ragione sociale; 2° la società in *accomandita*, formata da uno o più soci mallevadori verso altri soci capitalisti i quali non fanno che somministrare i fondi, detti soci in *accomandita* o *accomandatari;* essa dev'essere retta sotto un nome sociale di qualcuno dei mallevadori; la *società anonima*, cioè senza nome alcuno, indicante puramente l'oggetto dell'impresa; essa è amministrata da mandatari.

A queste tre specie di società se ne aggiunge una quarta detta *Società in partecipazione*, la quale sebbene legale come le sopraccennate, si distingue tuttavia da esse in quanto non è soggetta a formalità legali come le prime. Essa è la riunione temporanea di più persone colla mira di speculare su qualche impresa determinata.

A quest'ultima specie di società si riferiscono tutti i problemi del presente paragrafo; le operazioni relative alle tre prime formano il paragrafo seguente sotto il titolo *Azioni industriali*.

725. — L'operazione per cui si ripartisce fra i soci l'utile o la perdita risultante dalla loro associazione dicesi **regola di società.** Essa vien chiamata **semplice** o **composta,** secondo che i tempi, per cui i diversi soci hanno impiegato i loro capitali, sono *uguali* o *disuguali*.

726. — ***Regola di società semplice.*** *Esempio.* Tre soci impiegarono per un'impresa commerciale, il 1° ll. 2600, il 2° ll. 5200, il 3° ll. 7800, ed ebbero un guadagno totale di ll. 9360. Quale sarà la quota di ciascuno?

Le *poste* dei tre soci, ossia i capitali da loro impiegati, essendo rimasti a frutto nel medesimo tempo, le quote di guadagno debbono essere in ragione diretta delle rispettive poste; perciò l'operazione si riduce a ripartire il numero 9360 ll. in parti proporzionali a 2600; 5200 e 7800. Si avrà dunque (720):

$$2600 + 5200 + 7800 = 15600;$$

$$15600 : 9360 :: \begin{cases} 2600 : x = \text{ll. } 1560, & \text{quota del } 1^\circ \text{ socio} \\ 5200 : y = \text{ll. } 3120 & \text{» } 2^\circ \text{ »} \\ 7800 : z = \text{ll. } 4680 & \text{» } 3^\circ \text{ »} \end{cases}$$

Verificazione..... ll. 9360.

727. — Da quest'esempio s'inferisce che:

Nella regola di società semplice la somma delle poste sta al guadagno totale, come ciascuna posta parziale sta al rispettivo guadagno.

728. — ***Regola di società composta.*** *Esempio.* Due soci hanno fatto un guadagno di ll. 1500: il primo aveva messo 3000 ll. per 15 mesi, l'altro 5500 per 10 mesi. Qual dev'essere la quota di ciascuno?

È chiaro che ll, 3000 in 15 mesi fruttano quanto $3000 \times 15 = 45000$ in 1 mese; e ll. 5500 in 10 mesi fruttano quanto $5500 \times 10 = 55000$ in 1 mese.

Perciò si può supporre che il 1° socio abbia messo ll. 45000 ed il 2° ll. 55000 per lo stesso tempo; quindi l'operazione si riduce ad una regola di società semplice, e si ha:

$$45000 + 55000 = 100000;$$

$$100000 : 1500 :: \begin{cases} 45000 : x = \text{ll. } 675, & \text{quota del } 1^\circ \text{ socio} \\ 55000 : y = \text{ll. } 825 & \text{» } 2^\circ \text{ »} \end{cases}$$

Verificazione ..... ll. 1500.

729. — Da questo esempio risulta che:

Per risolvere i problemi sulla regola di società composta, si moltiplica da prima ciascuna posta pel rispettivo tempo, e quindi considerando i prodotti come poste, si stabilisce la proporzione come nella regola di società semplice.

Problemi sulla Regola di società.

819. Giuseppe ed Enrico posero in società per 5 anni, il 1° ll. 7000, il 2° ll. 8000, e lucrarono in tutto ll. 12000; cerchisi il guadagno d'ognuno.

820. Quattro soci posero in comune somme uguali, che lasciarono il 1° 1 anno e 4 mesi, il 2° 1 anno e 2 mesi, il 3° 2 anni e 3 mesi, il 4° 2 anni e 5 mesi; chiedesi quanto avrà ciascuno sul guadagno totale, che fu di ll. 2700.

821. Quattro uomini, avendo formato un capitale sociale di ll. 20000, ebbero di benefizio il 1° ll. 800, il 2° 700, il 3° 600, ed il 4° 500. Si trovino le poste parziali.

822. Di cinque soci il 1° mise ll. 800, il 2° ll. 400 più del 1°, il 3° 400 più del 2° e così degli altri. Quanto spetta a ciascuno sul guadagno, che fu di ll. 1800?

823. In un giardino *A* lavorò 15 giorni, *B* 12 e *C* 25; se il giardino produsse ll. 260, quanto toccherà a ciascuno?

824. Con ll. 4900 di capitale due mercanti fecero un guadagno che sta al medesimo capitale :: 5 : 35. Si domanda la posta ed il benefizio di ciascuno, sapendo che il 1° pose il triplo del guadagno totale.

825. Prisco e Remigio guadagnarono ll. 1300 sopra un capitale di ll. 3000; dicasi la posta di ciascuno, sapendo che il guadagno del 1° supera di ll. 260 quello del 2°.

826. Due soci posero a traffico, il 1° ll. 2300 per 1 anno, il 2° ll. 1500 per 18 mesi, ed ebbero 1400 lire di guadagno; quanto ne avrà ciascuno?

827. Lire 1400,60 sono il guadagno fatto da tre soci, i quali avevano messo in commercio, il 1° ll. 4006,40 per 10 mesi il 2° ll. 7006,50 per mesi 15 ½, ed il 3° ll. 6000,75 per 17 mesi e 20 giorni. Quanto spetta a ciascuno?

828. Due legnaiuoli presero in affitto per ll. 225,75 una tettoia, sotto la quale il 1° lasciò 1600 assi durante 15 mesi, ed il 2° 1257 durante due anni. Quanto dovrà pagare ciascuno pel fitto?

829. Rinaldo e Nicolò avendo fatto società per 2 anni, quegli mise di presente 1800 ll., e questi aspettò a porre il suo capitale di ll. 2100 dopo 7 mesi. Quanto spetta ad ognuno sulle ll. 419,40 di guadagno?

830. Due negozianti da cavalli debbono pagare 330 ll. pel fitto d'una scuderia, in cui il 1° tenne 35 cavalli per 6 mesi, ed il 2° 45 per 10 mesi. Quanto sborserà ciascuno di essi?

831. Quattro sarti che guadagnano tra tutti ll. 8,04 il dì, ricevettero ciascuno la medesima somma dopo aver lavorato, il 1° 4 giorni, il 2° 8, il 3° 10, ed il 4° 12. Dicasi il guadagno giornaliero d'ognuno.

832. Due mercanti posero in comune ll. 2472, sborsando, il 1° 640 ll. per 3 anni e 520 ll. per 28 mesi, il 2° 800 ll. per 34 mesi ed il resto per 2 anni. Quanto toccherà a ciascuno sulle ll. 1348,62 di guadagno?

833. Il guadagno fatto da 3 soci monta a ll. 600, delle quali il 3° ne ricevette 150; il 1° ed il 2° ebbero, tra posta e guadagno, rispettivamente ll. 540 e ll. 810. Qual è la posta ed il guadagno d'ogni individuo?

834. Con ll. 24000 di capitale 4 soci guadagnarono ll. 9000 in 3 anni: la posta del 1° sta a quella del 2° :: 1 : 2; quella del 2° a quella del 3° :: 2 : 3, e quella del 3° a quella del 4° :: 3 : 4. Trovinsi i guadagni parziali.

835. Quattro soci posero in commercio somme uguali; il 1° ritirò il proprio avere quando il 2° mise il suo, e così degli altri. Ora dopo 5 anni e 6 mesi ebbero i seguenti guadagni: il 1° ll. 1434,37, il 2° ll. 990, il 3° ll. 600, ed il 4° ll. 753,75. Si domanda quanto tempo ciascuna posta sia rimasta in società.

§ 3° — AZIONI INDUSTRIALI.

730. — A compimento di quanto dicemmo nel paragrafo antecedente sulla ripartizione de' guadagni nelle società, crediamo utile dare alcune nozioni sulle *azioni industriali*, le quali divennero a' giorni nostri oggetto di lucrosissime speculazioni.

Poniamo si debba formare un capitale di ll. 1000000, necessario per l'avviamento d'un'impresa industriale. A tal uopo si divide il richiesto capitale in piccole somme uguali di 1000 ll., di 500 ll., o di qualunque altro valore. Supponendolo diviso in 2000 parti, ciascuna sarà di ll. 500; ora queste somme parziali si chiamano **azioni.** Se 2000 persone s'interessano ciascuna per un'azione, saranno nell'impresa 2000 associati, ossia 2000 **azionisti**, ciascuno per 500 ll. Ogni azione è rappresentata da un titolo il quale viene rimesso all'azionista.

731. — La società paga a ciascun azionista l'interesse dei fondi versati. Quest'interesse che vien fissato dagli statuti stessi della società, è ordinariamente il 5 %. Se l'impresa è produttiva e dà profitti in soprappiù dell'interesse, questi vengono ripartiti su ciascuna azione. Se p. es., il profitto fosse di 60000 ll., essendo 2000 le azioni, la parte di ciascuna sarà 30 ll. Questo benefizio dicesi **dividendo;** esso calcolasi, come gl'interessi, ad un *tanto* per 100, e può variare anno per anno secondo il grado di prosperità dell'impresa, mentrechè l'interesse rimane invariabile. Ora se un'azione di 500 ll. frutta 30 ll. di dividendo, ciò equivale a 6 %.

732. — Ove un azionista voglia ricuperare i suoi fondi, ei non può ritirarsi dalla società; quel solo che può fare è di rimettere il suo titolo. Se l'impresa è lucrosa, egli troverà compratori che glielo pagheranno più del suo valore primitivo, sperando trovare nel *dividendo* sufficiente compenso; se all'opposto essa è poco produttiva, o si hanno timori sul suo avvenire, l'azionista troverà difficilmente compratori, e dovrà cedere il proprio titolo ad un prezzo minore del valore primitivo.

Il **corso** o prezzo delle azioni dicesi, **al pari**, **sotto** o **sopra il pari**. secondo che esso è uguale, minore o maggiore del valore nominale.

Fa d'uopo notare che qualunque sia il prezzo pagato per una azione, l'interesse ed il dividendo rimangono sempre i medesimi come se il prezzo dell'azione fosse *al pari*.

Così, p. es., per un'azione di 1000 ll. pagata 2000 si riceve 5 % d'interessi su 1000 lire, il che fa soltanto 2 $^1/_2$ % sulle 2000 lire; ma l'importanza del dividendo compensa tal perdita sull'interesse.

733. — Da quanto precede si scorge, che il calcolo della ripartizione dei dividendi non è altro che l'applicazione delle regole d'interesse e di società. Il numero delle azioni rappresenta un ugual numero di associati. Se un azionista ha varie azioni, p. es. 10, esso conta per 10 associati, ovvero per un socio che abbia una quota dieci volte più grande.

Esempio. Sia un'impresa col capitale sociale di 2000000 di ll. diviso in 2000 azioni di 1000 ll. ciascuna, la quale abbia fatto 236787 ll. di profitto in un anno; qual sarà il dividendo di ciascuna azione ed il tanto per 100 del dividendo?

236786 : 2000 = ll. 118,39 = *dividendo;*

1000 : 118,39 :: 100 : x = 11,83 = *tanto* % *del dividendo.*

Oltre il dividendo di ll. 118,39, ogni azionista ha ricevuto ll. 50 d'interesse, cosicchè il frutto d'un'azione di 1000 ll. è stato ll. 168,39.

Problemi sulle Azioni industriali.

836. Ad una società che ha ll. 50000 di capitale diviso in 200 azioni, rimane, dopo pagati gl'interessi 5 %, un dividendo totale di ll. 10540. Domandasi l'annuo frutto d'ogni azione.

837. Una compagnia partita in 4000 azionisti ebbe in un anno, dopo soddisfatto agl'interessi 5 %, ll. 210000 di guadagno da un capitale di ll. 400000. Cerchisi il dividendo assoluto e percentuale d'ogni azione.

838. I mille azionisti d'una strada ferrata ebbero ciascuno un dividendo di ll. 200; si chiede il capitale della società ed il montare d'una azione, sapendo che le spese per gl'interessi e l'amministrazione ascesero a ll. 200000, e che il guadagno brutto fu 10 %.

839. Qual è il netto guadagno per 100 su ciascuna delle azioni del problema precedente, e qual sarebbe l'utile di chi ne avesse 7?

840. Comprai al corso di ll. 1696 quattro azioni, che mi fruttarono ll. 424 in un anno tra interesse e dividendo, a qual tassa trovossi collocato il mio danaro?

841. Una società, che paga il 5 % d'interesse, emise azioni di 400 ll., le quali trovansi ora al corso di ll. 935, mentre la rendita al 3 % sullo Stato si vende 67,50. Qual dev'essere il di-

videndo di un'azione, affinchè il danaro frutti ugualmente comprando l'una o l'altra specie di titoli?

842. Bernardino vende 1500 ll. di rendita 3 % a 71,50 per comperare azioni a 4090; passato un anno, dopo aver ricevuto tra interesse e dividendo ll. 220 per ogni azione, le rivende a 4160, e compra nuovamente le sue cedole a 69,80. Si domanda quanto abbia guadagnato in tutto e quanto per 100.

843. Avendo comprato 150 azioni al corso 1065, le rivendo con 1875 ll. di benefizio totale; a quanto era salito il corso?

844. Una società, che emise 72000 azioni da ll. 500, avendo fatto in un anno ll. 6466826,50 di spese sopra ll. 11815330,32 d'entrata, pagò per ogni azione 40 ll. di dividendo oltre l'interesse 5 % e depose il rimanente nel fondo di riserva. Si domanda questo rimanente.

845. Premesso il problema antecedente, si chiede a qual corso fossero le azioni al principio dell'anno, se chi ne comprò a tal epoca riconobbe alla fine dell'anno aver impiegato il suo danaro al 7 %.

§ 4° — RAGGUAGLI D'INTERESSE E DI TEMPO.

734. — Più capitali posti a diverso interesse possono ridursi ad una medesima tassa, e tale che tra tutti producono la stessa rendita che prima fruttavano: e ciò dicesi **ragguaglio d'interesse.**

Più capitali scadenti ad epoche diverse possono ridursi alla medesima scadenza, in modo che tra tutti producono la stessa rendita: e ciò chiamasi **ragguaglio di tempo.**

735. — Questi ragguagli possono essere *semplici* o *composti*.

Sono **semplici,** quando si tratta del solo interesse o del solo tempo; e **composti** se comprendono l'uno e l'altro.

736. — ***Ragguagli semplici d'interessi.***

Esempio. *A* deve a *B* i seguenti capitali: ll. 936 al 3 %; ll. 1230 al 4 %; ll. 1834 al 6 %. Volendo ridurre questi capitali ad una sola tassa d'interesse, si domanda quale potrà essere.

Rappresentando con x la tassa richiesta si ha che:

Lire 936 al 3 % fruttano quanto ll. $936 \times 3 = 2808$ all'1 %
» 1230 » 4 % » » $1230 \times 4 = 4920$ »
» 1834 » 6 % » » $1834 \times 6 = 11004$ »
4000 » x % » » $4000 \times x = 18732$ » quindi

$$x = \frac{18732}{4000} = 4{,}683\ \%.$$ Dunque:

Regola. — *Per ridurre ad una sola tassa vari capitali posti a diverse tasse, fa d'uopo: 1° moltiplicare ogni capitale per la rispettiva tassa: 2° dividere la somma dei prodotti per la somma dei capitali; il quoziente esprimerà la tassa cercata.*

737. — ***Ragguagli semplici di tempo.*** Questa operazione presenta due casi: il 1° consiste nel cercare a qual epoca si dovrà operare un sol pagamento di vari debiti pagabili ad epoche diverse; il 2° nel cercare quanto si dovrà prorogare un pagamento per compensare anticipazioni fatte.

738. — ***1° Caso.*** *Esempio.* Un negoziante deve pagare 200 ll. fra 5 mesi, 500 fra 10 mesi, e ll. 300 fra 20 mesi: se egli desiderasse far un sol pagamento, a qual epoca dovrebbe effettuarlo?

L. 200 in 5 mesi frutt. quanto 200 × 5 = 1000 in 1 mese
» 500 » 10 » » 500 × 10 = 5000 »
» 300 » 20 » » 300 × 20 = 6000 »
L. 1000 » x » » 1000 × x = 12000 » quindi

$$x = \frac{12000}{1000} = 12 \text{ mesi. Dunque:}$$

Regola. — *Per trovare l'epoca comune di vari pagamenti si moltiplica ciascuno dei capitali dovuti pel tempo della sua scadenza, e fatta la somma dei prodotti, la si divide per quella dei capitali.*

739. — ***2° Caso.*** *Esempio.* Un negoziante doveva pagare 8500 ll.. fra 10 mesi; ma avendo sborsato in acconto ll. 2000 dopo 4 mesi, e ll. 3000 dopo 6 mesi, a qual epoca dovrà egli dare il rimanente per compensare le anticipazioni?

L'interesse di ll. 8500 in 10 m. = l'int. di 8500 × 10 = 85000 in 1 m.
» 2000 » 4 » » 2000 × 4 = 8000 »
» 3000 » 6 » » 3000 × 6 = 18000 »
8500 — 5000 = 3500. 85000 — 26000 = 59000.
Lire 3500 in x mesi fruttano quanto 3500 × x = 59000 in 1 mese.

$$x = \frac{59000}{3500} = \text{mesi } 16\ {}^{6}/_{7} \text{ mesi, e } 26 \text{ giorni.}$$

Regola. — *Per trovare l'epoca in cui si deve saldare un debito per compensare le anticipazioni fatte, si moltiplica la somma dovuta pel tempo della sua scadenza; si moltiplica pure ciascuna somma anticipata pel tempo trascorso dalla decorrenza degl'interessi fino al pagamento di essa; si fa la somma di questi prodotti, e sottratala dal prodotto primo, si divide il residuo pel rimanente da pagarsi.*

740. — ***Ragguaglio d'interesse e di tempo.*** *Es.* Giovanni è debitore di ll. 14000 a 2 anni 3 %, ll. 20000 a 3 anni 4 % e ll. 16000 a 4 anni 5 %. Volendo egli fare un solo pagamento, e valutare gli interessi ad una medesima tassa, si domanda l'epoca e la tassa comuni

1° Giusta la regola del N. 736, si otterrà da prima la tassa comune in questo modo:

$$\begin{array}{rcrcr} 14000 & \times & 3 & = & 42000 \\ 20000 & \times & 4 & = & 80000 \\ 16000 & \times & 5 & = & 80000 \\ \hline 50000 & & & & 202000 \end{array}$$

$202000 : 50000 = 4{,}04\ \%$

2° I precedenti prodotti sono ora considerati come capitali scadenti alle epoche enunciate nel problema.

Si troverà pertanto l'epoca comune operando così (738):

$$\begin{array}{rcrcr} 42000 & \times & 2 & = & 84000 \\ 80000 & \times & 3 & = & 240000 \\ 80000 & \times & 4 & = & 320000 \\ \hline 202000 & & & & 644000 \end{array}$$

$644000 : 202000 = 3$ an., 2 mesi, 8 g.

Regola. — *Per ridurre a tassa e scadenza comuni più capitali impiegati a scadenze e tasse differenti, si riducono prima alla tassa comune; quindi considerando i prodotti ottenuti come capitali scadenti alle epoche date dal problema, se ne cerca la scadenza comune.*

Problemi

sui Ragguagli d'interessi e di tempo.

846. La somma di ll. 8560 deve pagarsi metà in 6 mesi, e metà in 10; qual sarebbe l'epoca d'un pagamento solo?

847. Vitruvio compra per ll. 8000 di panno da pagarsi, $^1/_5$ in 6 mesi, $^1/_4$ in 8, ed il resto in 10; qual sarebbe l'epoca comune?

848. La somma di ll. 28000 deve pagarsi in due rate, la 1ª fra 18 mesi, e la 2ª che uguaglia $^1/_4$ della 1ª, 15 mesi più tardi. Volendosi fare un solo pagamento, quando lo si dovrà effettuare?

849. Un debito di ll. 6127,50 deve estinguersi per quinti: il 1° di presente, il 2° fra 4 mesi, il 3° fra 8, il 4° fra 12, ed il 5° fra 15; ove si volesse fare un solo pagamento a qual epoca dovrebbe aver luogo?

850. Ho presso Giuliano un credito di ll. 1000 scadente fra 5 anni; ma a sua richiesta mi accontento di ricevere la somma in 5 pagamenti uguali ed equidistanti; quanto tempo dovrà trascorrere fra l'uno e l'altro?

851. Prudenzio collocò i suoi fondi in 4 case ed a tasse differenti, cioè: ll. 25000 al 5 %, 60000 al 7 %, 15000 al 6 %, e 1800 al 4%; ma ciò tornandogli incomodo, li ritira per collocarli tutti insieme ad una medesima tassa. Qual dev'essere questa tassa?

852. Licinio doveva pagare fra un anno ll. 9476 per 2369 Dl. d'acquavite; ma in capo a 10 mesi pagò il valore di 633 Dl.; in qual tempo dovrà sborsare il resto?

853. Comprai panno per ll. 3600 da pagarsi fra 15 mesi; ma avendo anticipato ll. 2400, tengo le rimanenti 1200 ll. per 3 anni e 9 mesi. A qual epoca feci l'anticipazione?

854. Avendo venduto per ll. 8400 di panno a 12 mesi di respiro, ricevetti $^1/_3$ di questa somma 3 mesi più tardi in compenso dei $^2/_3$ anticipati; a qual epoca aveva io fatto l'anticipazione?

855. Di 600 lire pagabili fra 13 mesi, sborsai $^2/_3$ ad epoca tale, che posso tenere il rimanente per 2 anni; qual è quest'epoca?

856. Riccardo possiede una casa del valore di 15000 ll., che rende 4 % di fitto, un podere di ll. 20000 fruttante 6 %, e lire 2000 di rendita 5 %, che trovasi al corso 80. Se egli vende il tutto per impiegarlo ad una tassa comune, qual sarà essa?

857. Rimetto ad un banchiere gli effetti seguenti: ll. 1088 scadenti il 10 aprile, ll. 800 il 25 detto, ll. 1000 il 5 maggio, ll. 400 il 15 detto ll. 1200 il 31, perchè egli mi dia l'equivalente in un effetto scadente ad epoca tale, che non abbiavi scapito nè per lui nè per me. Cerchisi quest'epoca.

858. Qual è la scadenza comune delle 6 cambiali seguenti: ll. 2400 scadenti il 31 maggio, ll. 1800 il 4 giugno, ll. 300 l'8 luglio, ll. 1200 il 25 settembre, ll. 600 il 6 agosto, e ll. 900 il 3 luglio?

859. Si domanda la tassa e la scadenza comune ai seguenti capitali: 4000 ll. 5 % a 3 mesi, 7000 ll. 6 % a 18 mesi, 10000 ll. 3 % a 2 anni; e 12000 ll. 4% a 9 mesi.

860. Ho venduto merci per ll. 12000 a patto di ricevere detta somma in 6 pagamenti uguali di semestre in semestre più gl'interessi come segue: 3 % pel primo pagamento, 4 % pel secondo, 5 % pel terzo, 6 % pel quarto, 7 % pel quinto e 8% pel sesto; ma chiedendomi il debitore di fare un sol pagamento cogl' interessi ad una medesima tassa, si cerchi questa tassa e la scadenza comune.

§ 5° — MISCUGLIO E ALLIGAZIONE.

741. — Il **miscuglio** è l'unione di vari liquidi o altre sostanze mescolabili.

Il miscuglio prende il nome di **alligazione** o **lega** se trattasi di metalli fusi insieme.

742. — La regola di miscuglio ha per oggetto:

1° di trovare il prezzo del miscuglio, conoscendo le quantità ed i prezzi delle materie onde consta.

2° Di trovare le singole quantità delle materie componenti, conoscendo i loro prezzi e quello del miscuglio.

Nel primo caso dicesi *diretta*, nel secondo *inversa*.

743.— ***Regola diretta di miscuglio.*** *Esempio.* Un cantiniere mescola tre qualità di vino nelle seguenti proporzioni: lit. 32 da ll. 0,40, lit 28 da ll. 0,60, e lit. 54 da ll. 0,65. Quanto dovrà vendere il litro del miscuglio?

Lit.	32	da ll. 0,40	valgono	0,40	× 32	= ll.	12,80
»	28	» 0,60	»	0,60	× 28	= »	16,80
»	54	» 0,65	»	0,65	× 54	= »	35,10
»	114	di miscuglio valgono				ll.	64,70
»	1	»	vale	64,70	: 114	= ll.	0,567. *Risp.*

Regola. — *Per trovare il prezzo del miscuglio si moltiplica ciascuna quantità componente pel suo prezzo, e si divide la somma dei prodotti per quella delle quantità componenti.*

744. — ***Regola inversa di miscuglio.*** 1° *Esempio.* Si vuol mescolare grano da ll. 30 e da ll. 25 l' El., in modo da poter vendere il miscuglio a ll. 28; in qual proporzione hannosi da prendere le due qualità di grano.

Siano x gli ettolitri da prendersi della qualità il cui prezzo è superiore al prezzo del miscuglio, e y quelli della qualità inferiore.

Poichè sopra 1 El. della 1ª *si perde* $30 - 28 = 2$
e sopra 1 El. della 2ª *si guadagna* $28 - 25 = 3$,

la perdita ed il guadagno totale saranno $2 \times x$ e $3 \times y$; e dovendo l'uno compensare l'altra, si avrà $2 \times x = 3 \times y$, donde (596)

$$x : 3 :: y : 2.$$

Dal che si vede potersi formare il richiesto miscuglio in una infinità di modi; giacchè prendendo della 1ª qualità qualsivoglia numero di ettolitri, per es. 36, quelli da prendersi della 2ª si troveranno colla proporzione $36 : 3 :: y : 2$, donde $y = 24$.

2° *Esempio.* Un droghiere, che ha zuccaro da ll. 2,10, da 2,40, da 2,70 e da 3 il Cg., desidera farne un miscuglio che possa vendere a ll. 2,50; quanto dev'egli prenderne di ciascuna qualità?

Sopra 1 Cg. da cent. 300	si perde	300—250=50
» » 270	si perde	370—250=20
» » 240	si guadagna	250—240=10
» » 210	si guadagna	250—210=40.

Rappresentiamo con x e x' le quantità da prendersi di ciascuno dei prezzi superiori, con y e y' quelle dei prezzi inferiori, e combiniamo ciascuna delle prime qualità con ciascuna delle seconde. Si avrà, come nell'esempio precedente, combinando:

la 1ª colla 3ª,	$50 \times x = 10 \times y$,	donde	$x : 10 :: y : 50$		
» 1ª » 4ª,	$50 \times x = 40 \times y'$	»	$x : 40 :: y' : 50$		(α)
» 2ª » 3ª,	$20 \times x' = 10 \times y$	»	$x' : 10 :: y : 20$		(α)
» 2ª » 4ª,	$20 \times x' = 40 \times y'$	»	$x' : 40 :: y' : 20$		(α)

Se ora si dà un valore arbitrario ad una qualsiasi delle incognite, le proporzioni saranno determinate, e ciascuna darà un miscuglio composto di due qualità di zuccaro, il cui prezzo sarà ll. 2,50. Se quindi si sommano tutte le quantità componenti questi miscugli, ne risulterà uno composto delle quattro qualità, il cui prezzo sarà pure ll. 2,50. Ma cerchiamo di abbreviare questo metodo.

745. — Dividendo, in ciascuna delle precedenti proporzioni, il medio e l'estremo cognito pel prodotto dei medesimi, essi avranno un rapporto comune, e si ridurranno a quest'altra

$$(\beta) \qquad x : \frac{1}{50} :: y : \frac{1}{10} :: x' : \frac{1}{20} :: y' : \frac{1}{40},$$

la quale dimostra che: *le quantità da prendersi di ciascun prezzo sono inversamente proporzionali* (721) *alle differenze dei rispettivi prezzi a quello del miscuglio.*

Se nella proporzione (β) si moltiplica ciascuno dei conseguenti per un medesimo numero, multiplo dei denominatori, per es. 200, tutti i termini diventeranno interi e si avrà

$$(\gamma) \qquad x : 4 :: y : 20 :: x' : 10 :: y' : 5.$$

Si può dare qualsivoglia valore ad una delle incognite, e si otterranno altrettante soluzioni del problema, cioè altrettanti miscugli, tutti del prezzo di ll. 2,50.

Ma la soluzione più semplice si ottiene dando ad x, per es., il valore del suo conseguente; giacchè in tal caso, ogni rapporto dovendo essere uguale a 1, il valore delle altre incognite sarà altresì il rispettivo conseguente. Ponendo pertanto $x = 4$, si ha $y = 20$, $x' = 10$, $y' = 5$. Dunque si ottiene un miscuglio da ll. 2,50 prendendo 4 Cg. di 1ª qualità, 20 di 2ª, 10 di 3ª e 5 di 4ª. (Soddisfarebbe pure alla questione qualsivoglia sistema di numeri *equimultipli* dei precedenti).

Questi valori delle incognite essendo i rispettivi quoti di 200 diviso per le differenze 50, 10, 20 e 40, si può formolare la seguente

Regola. — *Per ottenere le quantità componenti il miscuglio, si formano le differenze dei prezzi parziali a quello del miscuglio; poi cercato un multiplo comune a queste differenze, lo si divide per ciascuna di esse. Ogni quoto esprimerà la quantità da prendersi del rispettivo prezzo.*

746. — ***Osservazione 1ª.*** Nelle proporzioni (α) i guadagni e le perdite si compensano *a due a due*, onde lo stesso ha luogo in (β) ed in (γ). Da ciò segue che la precedente regola dedotta da (γ), suppone essere tante le qualità inferiori quante sono le superiori. Se ciò non è, bisogna, perchè siavi compenso, *prendere 2, 3, 4.... volte il valore d'una delle incognite rappresentanti le qualità meno numerose, secondo che il loro numero è di 1, 2, 3,... inferiore a quello delle altre.*

Venga richiesto, per es., di formare coi precedenti zuccari un miscuglio da ll. 2,35. Rappresentando le quantità dei prezzi superiori con x, x', x'', e quella del prezzo inferiore con y, il valore di questa incognita dovrà prendersi 3 volte. Ora le differenze sono 65, 35, 5, 25; onde prendendo per multiplo il minimo, che è 2275, si avrà

$$x = \frac{2275}{65} = 35,\ x' = \frac{2275}{35} = 65\ x'' = \frac{2275}{5} = 455,\ y = \frac{2275}{25} = 91.$$

Dunque bisogna prendere Cg. 35 di 1ª qualità, 65 di 2ª, 455 di 3ª e $91 \times 3 = 273$ di 4ª.

747. — ***Osservazione 2ª.*** *Se la quantità del miscuglio è determinata, bisogna dividerla in parti direttamente proporzionali* (720) *ai numeri ottenuti operando giusta la regola e l'os-*

servazione precedenti. In fatti, vogliasi, per es., formare 117 Cg. del primo miscuglio (745); la proporzione (γ) dà

$$x+y+x'+y' : 4+20+10+5 :: x : 4 :: y : 20 :: x' : 10 :: y' : 5,$$

ossia $117 : 39 :: x : 4 :: y : 20 :: x' : 10 :: y' : 5$;

donde $x=12,\ y=60,\ x'=30,\ y'=15.$

3° *Esempio.* Un orefice ha Cg. 3,8 d'oro al titolo $^{800}/_{1000}$; quant'oro a $^{950}/_{1000}$ dev'egli aggiungervi per ottenere una lega a $^{900}/_{1000}$?

Le differenze sono $950 - 900 = 50$, e $900 - 800 = 100$, delle quali il minimo multiplo è 100; perciò i quoti sono 2 e 1, onde risulta

$$x : 2 :: y : 1.$$

Ma y, ossia i chilogrammi della qualità inferiore, sono 3,8; perciò si ha $x : 2 :: 3{,}8 : 1$, donde $x =$ Cg. 7,6. *Risp.*

748. — ***Quantità medie.*** La regola diretta di miscuglio serve pure a far conoscere il risultato *medio* di vari risultati ottenuti coll'osservazione o coll'esperienza.

1° *Esempio.* Sopra un mercato furono venduti in un giorno: 45 El. di grano a ll. 18 l'El.; 50 a ll. 20; 70 a ll. 20,50; 96 a ll.22, e 100 a ll. 23. Qual fu in tal giorno il prezzo medio del grano?

$(45\times18)+(50\times20)+(70\times20,\ 50)+(96\times22)+(100\times23)=$ ll. 7657;
$45+50+70+96+100=$ El. 361; $7657 : 361=$ ll. 21,21. *Risp.*

2° *Esempio.* Sopra una ferrovia furono trasportati, nel 1° giorno 3809 viaggiatori, nel 2° 2373 e nel 3° 1840; qual fu per questi tre giorni, il movimento medio giornaliero?

$3809+2373+1840=8022$; $8022 : 3=2674$. *Risp.*

749. — ***Osservazione.*** In tutte le aziende amministrative e commerciali si fanno sovente di tali computi per conoscere il risultato del movimento giornaliero, il quale poi si fa noto al pubblico per mezzo di tabelle che prendono diversi nomi: **bollettini** o **listini,** se relative a merci, effetti di commercio o monete; **mercuriali,** se relative a derrate; **rendiconti** se presentano il movimento, per un certo periodo di tempo, dell'esercizio di qualsivoglia negozio commerciale o industriale.

Problemi sul Miscuglio e sull'Alligazione.

861. Vercellino mescola 80 El. di frumento da ll. 47 con 40 El. da ll. 41; quanto potrà egli vendere l'El. del miscuglio?

862. Sopra un miscuglio composto di 140 lit. di vino da ll. 0,30 e 250 lit. da ll. 0,40, vuolsi guadagnare 5 cent. per litro. Quanto fa d'uopo venderlo?

863. Una botte contenente 240 litri essendo piena di vino da ll. 0,60, se ne estraggono i $^3/_4$, che sostituisconsi con vino da ll. 0,35; qual sarà il prezzo del miscuglio?

864. Con frumento da ll. 6, da ll. 8, da ll. 12, da ll. 15 e da ll. 18, si vuol fare un miscuglio di 650 misure, il quale si possa vendere a ll. 10. Quanto convien mettere di ciascuna qualità?

865. Vuolsi empire una botte di 240 litri con olio da ll. 0,95, ll. 0,85, ll. 0,75 e ll. 0,65, in modo che il miscuglio valga ll. 0,70 il litro. Quanto di ciascun prezzo bisogna metterne?

866. Voglio mescolare caffè da ll. 2,40 il Cg., da ll. 2,50 e da ll. 3; quanto debbo metterne d'ogni prezzo per averne 850 Cg. da ll. 2,90?

867. Quant'acqua fa d'uopo aggiungere a 150 litri di vino da ll. 0,90, perchè lo si possa vendere a ll. 0,75?

868. Un orefice vuol ottenere una verga del titolo $^{945}/_{1000}$, fondendo oro $^{890}/_{1000}$ con oro $^{960}/_{1000}$; in qual proporzione dovrà prendere i metalli componenti?

869. Con oro da $^{940}/_{1000}$ e da $^{860}/_{1000}$ voglionsi ottenere 2 Eg. da $^{920}/_{1000}$; quanto di ciascun titolo convien prenderne?

870. In un miscuglio di 48 lit. di vino, che vale ll. 0,60 il litro, entrano 30 lit. da ll. 0,75; cerchisi il prezzo degli altri litri.

871. Quanto rame conviene aggiungere a 3 Cg. d'oro $^{960}/_{1000}$ per ridurlo a $^{948}/_{1000}$?

872. Una verga d'argento $^{970}/_{1000}$ fusa con altra da $^{880}/_{1000}$ produsse argento $^{900}/_{1000}$; qual era il peso della 2ª, se la 1ª pesava 29 chilogrammi?

873. Con quattro qualità di vino vuolsi fare 350 litri di miscuglio da ll. 0,40, in cui ne entri tanto della 1ª quanto della 4ª, i prezzi parziali essendo ll. 0,65, ll. 0,45, ll. 0,35 e ll. 0,25; quanto dovrassene prendere di ciascuno?

874. Per un'esperienza chimica occorrono 100 Cg. d'acqua marina, la quale contenga $^6/_{100}$ di sale; ora i 100 Cg. presi a tal fine ne contengono $^9/_{100}$. Quant'acqua dolce bisognerà aggiungervi per ottenere il voluto grado di salsedine?

875. Venticinque persone spesero ll. 49 in un pranzo; chiedesi quanti uomini e quante donne erano a mensa, essendo la spesa d'un uomo ll. 2, e quella d'una donna ll. 1,75.

876. Per provare un pezzo d'artiglieria si spararono 25 colpi: 10 portarono a 560 m., 5 a 590, 6 a 600 e 4 a 550; qual è la portata media del pezzo?

877. Quanta seta da ll. 54 e da ll. 48 il Cg. si è venduta, se il prezzo medio dell'Eg. fu ll. 5?

878. Un materassaio vende lana da ll. 3,50, da ll. 4, e da ll. 4,75, in tutto 72 Cg. a ll. 4,50 l'uno; quanto ne vendè d'ogni qualità?

879. Si fondono insieme 4 verghe d'argento i cui titoli sono: $^{950}/_{1000}$, $^{840}/_{1000}$, $^{740}/_{1000}$, e $^{548}/_{1000}$, ed i pesi rispettivi Cg..... 6,24, 5,705, 10,50, e 8,45. Qual sarà il titolo della lega risultante, e quanto fino converrà aggiungervi per ridurla a $^{900}/_{1000}$?

880. Con 5 verghe d'argento, i cui titoli sono 950, 910, 845, 720 e 700 se ne vuol formare una del titolo 800; quanto se ne dovrà prendere di ciascuna?

881. Con riso da 5 ll., da 6, da 9 e da 15 la misura, si vuol fare 460 misure di miscuglio, in cui ne entrino 60 della qualità da 11, 6. Quanto fa d'uopo metterne delle altre, perchè il miscuglio valga 8 lire la misura?

882. Vuolsi ottenere 1 Cg. d'oro $^{750}/_{1000}$ dalla fusione di 4 verghe, i cui titoli sono: 900, 600, 400 e 300, facendovi entrare tre volte tanto metallo da 900 quanto da 600, e due volte tanto da 400 quanto da 300. Qual quantità d'ogni titolo si dovrà prendere?

CAPO IV.

REGOLA CONGIUNTA, MONETE ESTERE, CAMBIO, ECC.

§ 1° — REGOLA CONGIUNTA, PARITÀ DELLE MONETE.

750 — ***Regola congiunta.*** La *regola congiunta* altro non è che un caso particolare ed un modo abbreviato della regola del tre composta. Lo scopo suo è di far conoscere la relazione che passa fra due quantità, sapendo le relazioni di queste quantità con altre.

1° *Esempio.* Sapendosi che 10 lire sterline valgono 102 fiorini di Vienna, che 150 fiorini valgono 100 talleri prussiani, e talleri 81 valgono 300 lire italiane, si chiede in lire italiane il valore di 200 lire sterline.

Operando colla regola del tre, si hanno le seguenti proporzioni:

$$(1)\begin{cases} 10 \text{ ll. st.} : 102 \text{ fior.} :: 200 \text{ ll. st.} : z = \text{val. di } 200 \text{ ll. st. in fior.} \\ 150 \text{ fior.} : 100 \text{ tall.} :: z : y = \text{» » in tall.} \\ 81 \text{ tall.} : 300 \text{ ll. it.} :: y : x = \text{» » in ll. it.} \end{cases}$$

le quali moltiplicate termine a termine, danno luogo alla soppressione dei fattori comuni y e z, onde rimangono soltanto quat-

tro medi e quattro estremi. Ma osserviamo che, supponendo soppresse y e z, il quadro (1) prende la forma (2), e quindi la forma (3) mettendo in primo luogo il rapporto in cui entra l'incognita.

(2)
10 ll. st.	:	102 fior.		
150 fior.	:	100 tall.		
81 tall.	:	300 ll. it.		
	::	200 ll. st.	:	x

(3)
x ll. it.	:	200 ll. st.		
10 ll. st.	:	102 fior.		
150 fior.	:	100 tall.		
81 tall.	:	300 ll. it.		

Ora, nel quadro (3), la 1ª colonna contiene appunto i quattro estremi e la 2ª i quattro medii; si ha dunque

$$x \times 10 \times 150 \times 81 = 200 \times 102 \times 100 \times 300, \text{ donde}$$

$$x = \frac{200 \times 102 \times 100 \times 300}{10 \times 150 \times 81} = \text{ll. it. } 5037{,}037. \textit{ Risp.}$$

751. — In pratica si dispone direttamente l'operazione come nel quadro (3) separando però col segno = i termini di ciascun rapporto. Ciò fatto, altro non occorre fuorchè dividere il prodotto dei conseguenti per quello degli antecedenti.

Ora, osservando il suddetto quadro, si scorge che i rapporti debbono disporsi giusta le norme seguenti:

1° *Che il primo antecedente rappresenti l'incognita;*

2° *Che ogni conseguente rappresenti il valore del suo antecedente;*

3° *Che ogni antecedente sia omogeneo col conseguente del rapporto che lo precede;*

4° *Che l'ultimo conseguente sia omogeneo all'incognita.*

2. *Esempio.* Una pezza di panno comprata a Pietroborgo venne pagata 2 *rubli* l'*arschin*, oltre $^3/_4$ % di commissione. Quante lire italiane costa detto panno per ogni metro, se 10000 *arschin* fanno 7112 met., e 100 *rubli* 400 lire?

x ll. it.	=	1 met.		
7112 met.	=	10000 arsch.		
1 arsch.	=	2 rubli.		
100 rubli	=	400 ll.		
100 ll.	=	100 $^3/_4$ ll.		

$$x = \frac{10000 \times 2 \times 400 \times 100{,}75}{7112 \times 100 \times 100}$$

x = ll. it. 11,332. *Risp.*

752.— Questo modo di riunire o congiungere insieme e senza interruzione i vari rapporti, prese il nome di *regola congiunta* o *catenaria* (*). Essa dicesi pure *regola di cambio* pel frequente uso che se ne fa nei computi di Banca.

753. — ***Parità delle monete.*** Dovendo nel paragrafo seguente trattare del cambio, in cui le monete estere vengono considerate come una merce, che si compera e si vende, stimiamo conveniente di premettere quanto segue:

(*) I Tedeschi la chiamano *kettensatz;* da *Kette* (catena) e *Satz* (problema).

Per determinare in moneta d'uno Stato il valore d'una moneta d'altro Stato, si paragona la quantità di metallo fino contenuta nella seconda moneta colla quantità contenuta nella prima. Il risultato di questo paragone dicesi *pari monetario*. O in altri termini:

La **parità** d'una moneta con un'altra è il numero dei pezzi della prima specie richiesto, perchè la quantità di metallo fino in essi contenuta, uguagli quella contenuta in un pezzo della seconda specie.

Per esempio, la parità della lira italiana col tallero prussiano è ll. it. 3,7037, perchè ll. 3,7037 contengono tanto argento fino, quanto ne contiene 1 tallero prussiano.

754. — Il pari rispettivo di due monete dipende dal taglio e dal titolo delle medesime. Quindi per valutarlo fa d'uopo stabilire una regola congiunta, composta di questi elementi e del rapporto delle unità di peso che sono basi al taglio di ciascuna moneta.

Esempio. Venga richiesto di trovare la parità della lira italiana collo scellino inglese.

Consultando la *tavola delle misure estere* (pag. 328), si trova che 66 pezzi di scellino vengono coniati da 1 libbra *troy* d'argento al titolo $^{37}/_{40}$ che 175 libbre *troy* fanno 144 libbre *avoir du poids.*, e che 1 libbra *a. d. p.* uguaglia gr. 453,5922.

D'altra parte il taglio della lira italiana è 200 pezzi da 1 Cg. d'argento $^{9}/_{10}$. Si avrà dunque:

ll. it.	x =	1	scellino		
	66 =	1	libb *troy*	arg.	greggio ($^{37}/_{40}$)
	175 =	144	libb. *a. d. p.*	»	» »
	1 =	453,5922	gram,	»	» »
	40 =	37	»	»	» fino
	9 =	10	»	»	» greggio ($^{9}/_{10}$)
	1000 =	200	ll. it.		

$$x = \frac{144 \times 453{,}5922 \times 37 \times 10 \times 200}{66 \times 175 \times 40 \times 9 \times 1000} = \text{ll. it. } 1{,}1624527.$$

755. — Allorchè le due monete sono di differente materia, cioè l'una d'oro e l'altra d'argento, bisogna per ottenere la parità della moneta d'argento, tener conto del prezzo dell'oro in corso sulla piazza che ha detta moneta; e reciprocamente per ottenere la parità della moneta d'oro.

Esempio. Abbiasi da cercare la parità della lira italiana colla lira sterlina.

Coniandosi in Inghilterra (pag. 328) pezzi di lira st. 46 $^{29}/_{40}$ da 1 libbra *troy* d'oro al titolo $^{11}/_{12}$ ed il prezzo di 1 Cg. d'oro $^{9}/_{10}$ monetato in Italia ll. 3100, si avrà:

ll. it. x = 1 lira sterlina
$46\,^{29}/_{40}$ = 1 libb. *troy* oro greggio ($^{11}/_{12}$)
175 = 144 libb. *a. d p.* » » »
1 = 453,5922 gram. » » »
12 = 11 » » » fino
9 = 10 » » » greggio ($^{9}/_{10}$)
1000 = 3100 ll. it.

$$x = \frac{144 \times 453{,}5922 \times 11 \times 10 \times 3100}{46\,^{29}/_{40} \times 175 \times 12 \times 9 \times 1000} = \text{ll. it. } 25{,}2215245\ (*)$$

Problemi

sulla Regola congiunta e sulla parità delle monete (**).

883. Sapendosi che 10 rasi di Piemonte fanno 6 metri, si domanda quanti metri contenga una pezza di tela,, la quale, a ll. 1,20 il raso, costò ll. 124.

884. Il Governo italiano comprò in Inghilterra 82300 *Hundredweight* di piombo per 123312 *Lire sterline*. Chiedesi in Lire italiane il prezzo del quintale metrico.

885. Rodrigo fa comprare bozzoli a Roma a 25 Baiocchi la libbra oltre 1 $^{1}/_{2}$ % di commissione; quante Lire ital. dovrà rivenderli il Cg. per guadagnare l'8 %?

886. Posto che Fiorini olandesi 35,3125 valgano 40 Marchi banco di Amborgo, e che 210 ll. it. uguagliano 100 Fiorini olandesi, dicasi in Marchi banco l'equivalente di ll. it. 15000.

887. Qual è la parità del Tallero prussiano rispetto al fiorino del sud (di Francoforte)?

888. Si domanda la parità del Tallero prussiano rispetto al Fiorino nuovo (di Vienna).

889. Trovisi a quante piastre spagnuole equivalga il Marco banco di Amborgo.

890. Il prezzo dell'argento $^{37}/_{40}$ essendo in Inghilterra 66 scellini per 1 libbra *troy*, si domanda la parità della Lira sterlina col Tallero prussiano.

891. Alla zecca di Londra fu venduta una verga d'oro del titolo $^{112}/_{120}$, pesante 9 libbre e 12 once. Cerchisi quante Lire sterline siansi ricavate, se il prezzo è stato convenuto a Scellini 70 $^{3}/_{4}$ l'oncia col titolo legale $^{11}/_{12}$.

(*) Questi due esempi mostrano che, valutato in moneta nostrale, lo scellino non è $^{1}/_{20}$ della lira sterlina, benchè tale sia il loro valore legale. Ciò avviene perchè in Inghilterra il rapporto tra il valore dell'oro e quello dell'argento non è 15 1[2 come presso di noi. (V. *Soluzionario*, probl. 893 e 894).

(**) Per risolvere questi problèmi si troveranno nelle tavole pag. 196 e 328 i rapporti fra le varie misure, ed i tagli monetari de' diversi Stati d'Europa.

892. Trovisi il valore di 25 Cg. di foglie d'arancio sapendo che 7 Cg. di esse valgono quanto 8 Cg. d'assenzio, e 15 Cg. di assenzio equivalgono a 4 Cg. di senа, la quale vendesi ll. 2,10 il chilogramma.

893. Vuolsi conoscere il rapporto dei metalli nobili *fini* in Inghilterra, in conseguenza dei tagli monetari espressi nella Tavola pag. 328.

894. Giusta i medesimi tagli monetari chiedesi il rapporto de' metalli nobili aventi il rispettivo titolo legale, cioè $^{11}/_{12}$ per l'oro, e $^{37}/_{40}$ per l'argento.

895. Un orefice di Francoforte *s/m*, comprò una verga d'oro del titolo $^{272}/_{288}$, al prezzo di 804 fiorini e 48 carantani la libbra nuova d'oro fino. Quanto spese egli, se la verga pesava Marchi di Colonia 24 $^{3}/_{4}$? (1 *Marco* di Colonia = gr. 233,8555).

896. Il taglio del Marco corrente di Amborgo essendo 35 pezzi da 1 Marco di Colonia d'argento fino, cerchisi in lire italiane il valore di questa moneta.

897. Si vuol sapere quanti Marchi correnti equivalga il Marco banco, i tagli monetari essendo pel 1° 35 e pel 2° 27 $^{3}/_{4}$ da 1 Marco di Colonia.

898. Quali sono le rispettive parità della Piastra spagnuola e del Marco banco, giusta i piedi monetari espressi nella Tavola pag. 328?

899. Trovare le parità reciproche della Piastra spagnuola e della Piastra turca, secondo i rispettivi tagli espressi nella Tavola pag. 328.

900. Dalle *mercuriali* di Pietroborgo e di Costantinopoli consta che il grano vendesi, sulla 1ª piazza rubli 8,75 il *Tschetwert*, e sulla 2ª Piastre 23 $^{1}/_{2}$ il *Kilò*. A quante lire italiane per ogni ettolitro corrisponde ciascuno di questi prezzi?

§ 2° — CAMBIO.

736. — Il **cambio** ha per iscopo di operare per mezzo di *lettere di cambio* il compenso dei reciproci debiti de' commercianti o de' governi senza trasporto di danaro.

757. — Supponiamo che il negoziante Beltrami di Torino voglia far pervenire al suo corrispondente Blanchard di Lione la somma di fr. 5000. Egli, per evitare le spese di trasporto ed i rischi che il danaro può incorrere per via, si volge ad un banchiere della propria città al quale rimette la detta somma.

Questi trae sopra un banchiere di Lione, che gli è debitore, una lettera di cambio d'ugual valore all'ordine di Beltrami, il quale ne fa la girata in favore di Blanchard; e questi ne riceve l'ammontare dal banchiere di Lione.

In tal modo e senza verun trasporto di danaro, si estinguono

due debiti, cioè quello di Beltrami verso Blanchard e quello del banchiere di Lione verso il banchiere di Torino.

758. — Supponiamo ancora che Brunetti di Genova voglia riscuotere un credito di 1500 lire sterline, che egli ha presso Wood di Londra. Egli si rivolge pure ad un banchiere che gli paga la detta somma in lire italiane. Ciò fatto Brunetti spicca una tratta sopra Wood, all'ordine del banchiere di Genova.

759. — Ripigliamo ad esame ciascuno de' precedenti esempi:

Nel primo (757), Beltrami di Torino collo sborsare 5000 lire al banchiere, acquistò la proprietà d'una cambiale rappresentante 5000 fr., che il banchiere di Torino possedeva presso quello di Lione.

Venuto in possesso di questo fondo, ei potè cederlo a chi volle; e lo cedette, ossia ne fece *rimessa*, a Blanchard. Egli adunque, per poter fare una rimessa, dovette *comperarla*. Da ciò si vede che:

Rimettere vale comperare monete estere, pagandole in monete nazionali.

Nel secondo esempio, Brunetti di Genova coll'incassare in monete italiane il valore di 1500 lire sterline, cedette o *vendè* al banchiere la proprietà di queste, ossia della *tratta* che le rappresentava. Donde si conchiude pure che:

Trarre vale vendere monete estere, ricevendo in pagamento monete nazionali.

Le lettere di cambio possono adunque considerarsi come una merce che si compera e si vende; ed il cambio altro non è che il *commercio* delle lettere di cambio.

760. — Secondo che questo commercio si esercita fra piazze del medesimo Stato o di Stati diversi, esso chiamasi **Cambio interno** o **Cambio estero.**

Nello stile bancario si adoperano le espressioni **scontare** e **negoziare,** invece delle voci comuni *comperare* e *vendere.*

Prezzo del Cambio.

761. — Le cambiali tratte sopra una medesima piazza vengono ora più ora meno ricercate, in ragione dei debiti maggiori o minori che i commercianti hanno da estinguere su detta piazza, e della maggiore o minore difficoltà di spedirvi il danaro. Quindi è che una cambiale di 5000 lire, per esempio, tratta da Torino su Lione potrà venire negoziata a Torino per una somma maggiore o minore di ll. 5000; o in altri termini, 5000 lire percepibili a Lione possono vendersi a Torino più o meno di 5000 lire. Ora:

Il prezzo al quale si vende sur una piazza il danaro percepibile in un'altra dicesi *corso* o *prezzo del cambio.*

762. — ***Prezzo del cambio interno.*** Colui che negozia una cambiale tratta sopra una piazza dello Stato, riceve

in pagamento monete della stessa specie di quelle che vende; egli pertanto, dal numero di monete che riceve, scorge immediatamente il guadagno o la perdita totale o percentuale che gliene risulta. Perciò:

Il prezzo del cambio interno si esprime ad un tanto *per cento* di profitto o di perdita.

Dicendosi per es.. che il cambio su Genova è a $^1/_2$ % di profitto a Torino, ciò significa che negoziando a Torino una cambiale pagabile a Genova, si ricevono ll. 100,50 per ogni 100 lire del suo valore nominale.

Allorchè il cedente percepisce esattamente la somma indicata dalla cambiale, non v'ha nè profitto nè perdita. In tal caso si dice che il cambio è **al pari.**

Esempio, Il corso del cambio su Genova essendo a Torino $^1/_2$ % di perdita, quanto produce un effetto di 3000 lire sopra Genova, negoziando a Torino?

Soluzione $100 : {}^1/_2 :: 3000 : x = 15.$

Dunque il possessore dell'effetto riceve a Torino soltanto lire $3000 - 15$, ossia ll. 2985.

Se il cambio fosse a $^1/_2$ % di profitto, egli percepirebbe lire $3000 + 15 =$ ll. 3015; e se il cambio fosse al pari, ll. 3000.

763. — ***Prezzo del cambio estero.*** Colui che negozia una cambiale tratta sopra una piazza estera, per esempio su Londra, vende lire sterline e riceve in pagamento lire italiane. Or queste lire non avendo il medesimo valore, il venditore non può, dal numero di lire italiane che percepisce, scorgere immediatamente se v'abbia profitto o perdita. Perciò il prezzo del cambio estero non si può indicare al modo stesso di quello del cambio interno.

Per meglio intendere in qual modo si indichi questo prezzo, osserviamo quel che si pratica per gli altri rami del commercio. Per i bozzoli, il fieno, ecc., uno dei contraenti ne dà una quantità fissa per ricevere in contraccambio una somma variabile di danaro. Per esempio, 10 chilogrammi di bozzoli per 60 ll., 65 ll., 70 ll., più o meno; ovvero 100 chilogrammi di fieno per ll. 5, ll. 5,50, ll. 6, ecc. Per alcuni articoli invalse l'uso contrario, quello cioè di darne una quantità variabile per una somma fissa; per esempio il prezzo de' zolfanelli si esprime a tanti mazzi per un soldo. In ogni caso pertanto il prezzo delle cose si esprime col mezzo di *due termini*, di cui uno rimane fisso l'altro varia. Or così appunto viene espresso il prezzo del cambio estero, cioè:

Quando due nazioni sono in relazione di cambio, l'una dà sempre all'altra una quantità fissa della sua moneta, per ricevere in contraccambio ed in moneta di quest'ultima, una somma che varia secondo le circostanze. La

somma fissa si chiama **certo;** la somma variabile dicesi **incerto**, e costituisce il **prezzo** o **corso del cambio estero.**

Per esempio, 1 lira sterlina è il *certo* che Londra dà sempre a Torino per ricevere lire ital. 25,22 più o meno che è l'*incerto.* Quindi quando si dice che una cambiale su Londra fu negoziata a Torino a ll. 25,30, per es., ciò significa che il venditore ricevette ll. 25,30, per ogni lira sterlina indicata dalla cambiale.

764. — Oltre le cause già accennate (761), influiscono pure sulle oscillazioni del cambio la maggiore o minore lunghezza della scadenza degli effetti, e la tassa di sconto più o meno elevata in uso sulle piazze dove i medesimi sono pagabili. Stante queste varie cause, il cambio estero si trova ora **al pari,** ora **sopra** o **sotto il pari.**

765. — Il cambio estero è *al pari* quando la somma componente l'incerto contiene una quantità d'argento o d'oro *puro* uguale alla quantità d'argento o d'oro *puro* contenuta nella somma constituente il certo (753).

Esempio. Marini di Genova deve 785 fiorini ad un suo corrispondente di Amsterdam: volendo egli estinguere questo debito, compera a Genova una rimessa di fiorini 785 al cambio di ll. 210,5 per 100 fiorini: quanto spende?

Soluzione 100 : 210,50 :: 785 : x = ll. 1652,42.

766. — ***Listino del cambio.*** Il corso del cambio viene accertato ogni giorno dagli *agenti di cambio*, e quindi fatto noto al pubblico in appositi bollettini chiamati *Listini.*

In questi listini figura soltanto l'*incerto*, senza indicazione della sua natura, ed il certo non vi comparisce punto; ond'è che essi riescono inintelligibili a chi non è pratico degli affari bancari.

A comodo pertanto dei principianti, ed altresì per agevolare la risoluzione de' problemi che siamo per proporre, poniamo qui, *valulati al pari*, i corsi dei cambi di alcune piazze aggiungendovi le indicazioni necessarie a far intendere i listini uffiziali.

Parità dei Cambi.

Genova.

	incerto			certo	
Amborgo.....	187,25	Lire italiane	per	100	Marchi banco (*).
Amsterdam.....	210	»	»	100	Fiorini olandesi.
Berlino.....	370,33	»	»	100	Talleri prussiani.
Francoforte *s/m*..	211,65	»	»	100	Fiorini del Sud.
Londra.....	25,22	»	»	1	Lira sterlina.
Parigi.....	100	»	»	100	Franchi.
Pietroborgo.....	400	»	»	100	Rubli d'argento.
Vienna.....	246,90	»	»	100	Fiorini nuovi.

(*) Cioè colla piazza di Amborgo si paga a Genova 187,25 ll. it. *più o meno* per ricevere *invariabilmente* 100 M. b.

Amsterdam.

	incerto		certo		
Amborgo.....	35,65	Fiorini oland.	per	40	Marchi banco.
Berlino.....	35,30	»	»	20	Talleri prussiani.
Francoforte *s/m* ..	100,75	»	»	100	Fiorini del Sud.
Genova.....	47,60	»	»	100	Lire italiane.
Londra	12	»	»	1	Lira sterlina.
Parigi.....	57,15	»	»	120	Franchi.
Pietroborgo	190,45	»	»	100	Rubli argento.
Vienna.....	117,60	»	»	100	Fiorini nuovi.

Berlino.

Amborgo.....	151,60	Talleri pruss.	per	300	Marchi banco.
Amsterdam.....	141,70	»	»	250	Fiorini olandesi.
Francoforte *s/m* ..	57,20	»	»	100	Fiorini del Sud.
Genova e Parigi.	81	»	»	300	Lire italiane.
Londra	6,80	»	»	1	Lira sterlina.
Pietroborgo	108	»	»	100	Rubli argento.
Vienna.....	100	»	»	150	Fiorini nuovi.

Francoforte.

Amborgo.....	88 1/3	Fiorini del Sud	per	100	Marchi banco.
Amsterdam.....	99 1/16	»	»	100	Fiorini olandesi.
Berlino	105	»	»	60	Talleri.
Genova e Parigi..	94 1/2	»	»	200	Lire italiane.
Londra.....	119	»	»	10	Lire sterline.
Pietroborgo	189	»	»	100	Rubli argento.
Vienna.....	116 1/2	»	»	100	Fiorini nuovi.

Vienna.

Amborgo.....	75,80	Fiorini nuovi	per	100	Marchi banco.
Amsterdam.....	85	»	»	100	Fiorini olandesi.
Berlino	150	»	»	100	Talleri.
Francoforte *s/m*..	85,80	»	»	100	Fiorini del Sud.
Genova e Parigi..	40,50	»	»	100	Lire italiane.
Londra.....	102	»	»	10	Lire sterline.
Pietroborgo	162	»	»	100	Rubli argento.

Amborgo.

Amsterdam.....	35,65	Fiorini oland,	per	40	Marchi banco (*).
Berlino.....	151,60	Talleri pruss.	»	300	»
Francoforte *s/m*.	88,50	Fiorini del Sud	»	100	»
Genova e Parigi..	187,25	Lire italiane	»	100	»
Vienna.....	75,85	Fiorini nuovi	»	100	»
Londra.....	13 1/2	Marchi banco	»	1	Lira sterlina.
Pietroborgo	34 1/6	Scellini banco	»	1	Rublo argento.

Londra.

Amborgo.....	13 1/2	Marchi banco	per	1	Lira sterlina.
Amsterdam.....	12	Fiorini olandesi	»	1	»
Berlino	6 8/10	Talleri pruss.	»	1	»
Francoforte *s/m* .	119 1/5	Fiorini del Sud	»	10	»
Genova e Parigi..	25,22	Lire italiane	»	1	»
Vienna.....	10 1/5	Fiorini nuovi	»	1	»
Pietroborgo.....	38 1/10	Pence	»	1	Rublo argento.

(*) Cioè colla piazza di Amsterdam si paga in Amborgo *invariabilmente* 40 M. b. per ricevere 35,65 Fiorini olandesi *più o meno*.

Pietroborgo.

	incerto			certo		
Amborgo.....	34	1/5	Scellini banco	per	1	Rublo argento.
Amsterdam.....	190	2/5	Fiorini oland.	»	100	»
Berlino.....	108		Talleri pruss.	»	100	»
Francoforte *s/m*..	188	9/10	Fiorini del Sud	»	100	»
Genova e Parigi..	400		Lire italiane	»	100	»
Londra.....	38	1/10	Pence	»	1	»
Vienna.....	162		Fiorini nuovi	»	100	»

Osservazione. — Dalle precedenti tavole si rileva che: 1° le piazze di Amsterdam, Berlino, Francoforte, Genova, Parigi e Vienna danno l'*incerto* a tutte le altre; 2° Pietroborgo dà a tutte il *certo*; Amborgo dà il *certo* a tutte fuorchè a Londra ed a Pietroborgo; 4° Londra dà il *certo* a tutte fuorchè a Pietroborgo.

767. — I listini de' cambi esprimendo, come si è detto, soltanto il numero costituente l'incerto, bisogna, per intenderli, avere presente la natura di quest'incerto, ed il fisso a cui esso corrisponde. Se, per esempio, sul listino della borsa di Genova il cambio su Pietroborgo è segnato 398,50, questo numero esprime lire italiane, perchè a Genova l'incerto è segnato in lire italiane; ed esso è il prezzo di 100 rubli che sono il fisso. Se invece sul listino di Pietroborgo il cambio su Genova è segnato 398,50, questo numero esprime ancora lire italiane, perchè Pietroborgo dando il certo a Genova, il cambio su questa piazza viene in quella segnato in lire italiane che sono l'incerto.

768. — ***Rialzo e ribasso del cambio.*** Le oscillazioni del cambio soglionsi chiamare *rialzo* e *ribasso*. Per conoscere dal listino se il corso del cambio con una piazza estera alzi o abbassi, bisogna anzitutto osservare quale delle due piazze dia il *certo*.

Se la piazza estera dà il certo, il corso è in rialzo tosto che l'incerto viene espresso sul listino da un numero più grande. Perchè in tal caso per una quantità fissa di monete estere si dà una maggior somma in monete nazionali.

Se la piazza estera dà l'incerto, il corso è in rialzo tostochè questo incerto viene espresso sul listino da un numero più piccolo. Perchè allora per una somma fissa in moneta nazionale si ha un numero minore di monete estere.

Cambio diretto e Cambio indiretto.

769. — Nel precedente esempio (765) Marini rimettendo *direttamente* in Amsterdam, altro non fa che comperare (759) i fiorini pagandoli in lire italiane.

Ond'è che l'operazione aritmetica consiste soltanto nel cercare quante lire facciano 785 fiorini, ossia cambiare 785 fiorini in lire. In simil caso il cambio dicesi *diretto*. Dunque:

Il cambio è **diretto** quando si cambiano immediatamente le monete d'una piazza colle monete d'un'altra.

770. — Il medesimo negoziante Marini può estinguere il suo debito in un modo *indiretto*, operando, per esempio, come segue. Egli fa rimessa a Müller di Amborgo di una somma sufficiente espressa in marchi banco; Müller avendo riscosso l'ammontare di questa rimessa, ne stipula un'altra d'ugual somma, espressa in fiorini, e la spedisce al creditore di Marini in Amsterdam.

Ora, operando in questo modo, Marini deve da prima convertire i 785 fiorini in marchi banco, al corso di Amborgo con Amsterdam, per poter formolare la rimessa a Müller; quindi siccome egli paga questa rimessa a Genova, bisogna che egli converta ancora i marchi banco in lire, al corso di Genova con Amborgo, per sapere quanto debba sborsare. Pertanto i fiorini vengono convertiti in lire convertendoli prima in marchi banco.

Nel rimettere a Müller, Marini può dargli ordine di rimettere, non già direttamente in Amsterdam, ma a Landers di Londra, p. es., con obbligo a quest'ultimo di rimettere in Amsterdam. Allora i 785 fiorini vengono cambiati in lire sterline, queste in marchi banco, e questi in lire italiane.

In simili casi il cambio dicesi *indiretto;* dunque:

Il cambio è **indiretto** quando la conversione delle monete d'una piazza in quelle d'un'altra si fa cambiandole successivamente in monete di una o più piazze *intermedie*.

771. — Si vale del cambio indiretto chi si trova in uno dei casi seguenti: 1° Allorchè non esiste cambio aperto direttamente fra due piazze; 2° quando avvenimenti politici od altro interrompono le comunicazioni dirette con una piazza; 3° allorchè, atteso il corso presente de' cambi, il sussidio di una o più piazze intermedie offre maggior vantaggio del cambio diretto.

1° *Esempio*. Supponiamo che Marini di Genova, per fare pervenire 785 fiorini in Amsterdam rimetta per la via indiretta di Amborgo come venne spiegato (770), e cerchiamo quanto gli costerà la rimessa, essendo il cambio di Genova con Amborgo 187,50 e quello di Amborgo con Amsterdam 35,80 (767).

Questo problema si risolve colla regola congiunta come segue:

lire it. $x = 785$
$35{,}80 = 40$ marchi banco
$100 = 187{,}50$ lire it.

$x =$ ll. 1644,55. *Risp.*

Si osservi che Marini estinguendo il suo debito per questa via spende meno che non per la via diretta (765).

2° *Esempio.* Un negoziante di Napoli ha venduto ad un suo corrispondente di Londra per 350 lire sterline di merci; per riscuotere questo credito egli trae sopra un banchiere di Pietroborgo al cambio di 400,50, con ordine di rivalersi traendo sopra Berlino a 110, ed il banchiere di Berlino deve rimborsarsi col trarre sul debitore di Londra a 6,80. Quante lire italiane ricaverà il negoziante di Napoli?

lire it. x = 350 lire sterline
1 = 6,80 talleri prussiani
110 = 100 rubli
100 = 400,50 lire it.

x = ll. 8663,36. *Risp.*

3° *Esempio.* Il cambio di Genova con Londra essendo 24,25, e quello di Londra con Amsterdam 11,40, qual è il cambio indiretto di Genova con Amsterdam per la via di Londra?

Trovare il cambio tra Genova ed Amsterdam è cercare quante lire italiane valgano 100 fiorini, giacchè questi sono il *certo* che Amsterdam dà a Genova per avere una somma variabile in lire italiane. Dunque si avrà

lire it. x = 100 fiorini
11,40 = 1 lira sterl.
1 = 24,23

x = ll. 212,72. *Risp.*

772. — **Provvigione.** Poichè nel cambio indiretto entrano banchieri intermedii, ai quali si fanno tratte e rimesse con ordine di rivalersi o di rimettere sopra un'altra piazza, questi banchieri hanno diritto ad una provvigione (702), la quale si valuta a $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$,... per cento, ed è sempre a carico di colui che spicca la tratta o fa la rimessa.

Nei computi sul cambio indiretto bisogna pertanto introdurre nella regola congiunta, oltre i rapporti dei cambi, ancora il rapporto relativo alla provvigione.

Il primo termine di questo rapporto è sempre 100; il secondo è maggiore o minore di 100, secondo che il vantaggio del traente richiede, per risultato dei calcoli, una somma piccola od una somma grande; giacchè la provvigione è a suo carico.

Per esempio nel primo dei problemi precedenti è vantaggioso per *Marini* che il risultato dei calcoli sia piccolo; perciò supponendo che il corrispondente intermedio percepisse $^1/_4$ % di provvigione, bisognerebbe introdurre nella congiunta il rapporto 100 : 100 $^1/_4$. Nel secondo problema invece, essendo la provvigione $^1/_4$ %, il rapporto da introdursi sarebbe 100 : 99 $^3/_4$.

Problemi sul Cambio.

901. Una cambiale di ll. 2400 su Novara fu negoziata a Genova a 1 $^1/_4$ $^0/_0$ di profitto; quanto si riscosse?

902. Il cambio su Parigi essendo a Torino 2 $^0/_0$ di perdita, quanto costerà in questa piazza una rimessa di ll. 3000 per Parigi?

903. Negoziando a Torino una tratta sopra Alessandria sul Tanaro a $^7/_8$ $^0/_0$ di perdita, si ricevettero ll. 1982,50; qual n'era l'ammontare?

904. Bertini di Genova spedisce ad un negoziante di Vienna per 1500 fiorini di seta, e riscuote il suo credito spiccando una tratta d'ugual ammontare, ch'ei negozia al cambio di 247; quante lire it. riceverà?

905. Il cambio di Genova su Madrid essendo lire it. 530 per 100 piastre, quanto costerà a Genova una rimessa di 860 piastre e 15 reali?

906. Qual era il montare d'una cambiale su Costantinopoli, la quale fu pagata a Genova ll. it. 2400, il cambio essendo ll. 24 per 100 piastre turche?

907. Per estinguere un debito di 4000 piastre a Cadice, un negoziante di Genova rimette a Londra con ordine di rimettere a Cadice. Quante ll. it. dovrà spendere, se il cambio su Londra è 24,40, quello di Londra su Cadice 39 denari per 1 piastra, e si paga $^3/_4$ $^0/_0$ di provvigione a Londra?

908. Un negoziante di Parigi volendo riscuotere un credito di 3000 fiorini in Amsterdam, trae per la via indiretta di Londra ed Amborgo, sulle quali piazze la provvigione è rispettivamente $^3/_4$ $^0/_0$ e $^1/_2$ $^0/_0$. Quanti franchi riceverà, se i cambi sono: Parigi su Londra 25, Londra su Amborgo 13 $^1/_2$, Amborgo su Amsterdam 36?

909. Ludwig Schiller di Amborgo deve 15000 lire it. a Genova; quanti marchi banco gli costerà l'estinzione di questo debito per la via di Amsterdam, dove si paga $^1/_2$ $^0/_0$ di provvigione, essendo il cambio di Amborgo su Amsterdam 35,60, e quello di Amsterdam con Genova 47,25?

910. Il 5 marzo fu venduta a Torino una cambiale di 627 marchi banco, 10 scellini e 8 den. sopra Amborgo, colla scadenza al 25 giugno. Si cerchi la somma ricavata, essendo il cambio sopra Amborgo 138 per le cambiali a 90 giorni, e lo sconto ivi in corso 6 $^1/_2$ $^0/_0$.

911. Un effetto di 450 lire sterline su Londra, scadente il 15 ottobre, venne negoziato a Torino il 10 agosto al cambio di 25,125 portato dal listino per le cambiali a 90 giorni. Chiedesi la somma ricevuta, essendo 5 $^0/_0$ il corso dello sconto a Londra.

912. Un banchiere di Torino trae su Amborgo per 3400 marchi banco, con ordine ivi di rivalersi su Berlino; egli poi opera il rimborso a Berlino facendovi rimessa per la via di Londra. Quante lire it. gli costerà questa rimessa, se i cambi sono: Torino su Londra 25, Londra su Berlino 6 $^8/_{10}$, Amborgo con Berlino 151 $^3/_4$ e le spese nelle piazze intermedie montano a $^1/_2$ $^0/_0$?

§ 3° — ARBITRATO.

773. — Le riscossioni ed i pagamenti tra due piazze si possono effettuare in due modi, cioè:

Per riscuotere si può o *trarre* sul debitore o *farsi rimettere* dal medesimo; e per pagare si può o *rimettere* al creditore o *dargli ordine di trarre* su noi. Il trarre poi ed il rimettere può farsi, come si è veduto, direttamente o indirettamente.

Da tutto ciò conseguita che una medesima operazione bancaria può venire effettuata per diverse vie.

L'operazione per cui si cerca la via di cambio più vantaggiosa chiamasi **arbitrato** o **arbitraggio bancario** (*).

774. — I casi principali in cui l'arbitrato può tornar utile sono i tre seguenti:

1° Quando si deve fare un pagamento in estera valuta.
2° Quando si deve riscuotere in estera valuta.
3° Quando si vuole speculare sopra i corsi di cambio.

775. — ***1° Caso.*** Allorchè si deve fare il pagamento d'una somma determinata in moneta estera, la ricerca volge sulla via e sul modo d'impiegare la minor somma possibile in moneta nazionale per saldare il debito.

1° *Esempio.* Ambrogio di Francoforte, essendo debitore di fr. 15000 verso Carlo di Parigi, e volendo saldare questo suo debito, desidera sapere se gli torni meglio rimettere a Carlo a 94, ovvero farsi trarre dal medesimo a 212.

Per rimessa	*Per tratta*
Fior. x = 15000 Fr.	Fior. x = 15000 Fr.
200 = 94 Fiorini	212 = 100 Fiorini
x = Fior. 7050	x = Fior. 7075, Carant. 28.

Colla rimessa Ambrogio ha un vantaggio di fior. 25, carant. 28.

2° *Esempio.* Un banchiere di Genova ha un debito di 8000 fiorini olandesi ad Amsterdam, che può pagare in due modi, cioè: 1° *Direttamente* con rimesse comprate a Genova a 211,50; 2° *Indirettamente* per Amborgo a fiorini 36 per 40 marchi banco. Qual è la via più van-

(*) L'arbitrato preso in senso generale comprende ogni sorta di speculazione commerciale; quindi si fanno arbitrati di merci, di monete, di fondi pubblici, ecc.

taggiosa, se l'Amborgo a Genova è stabilito a 189, e la provvigione ed altre spese a $^1/_4$ $^0/_0$?

Per via diretta	*Per via indiretta*
Lire it. x = 8000 Fiorini	Lire it. x = 8000 Fiorini
100 = 211,50 ll. it.	36 = 40 Marchi b°
	100 = 189 Lire it.
	100 = 100 $^1/_4$
x = ll. 16920	x = ll. 16842

La via indiretta presenta al debitore un utile di ll. 78.

776. — **2° *Caso.*** Quando si deve riscuotere una somma determinata in moneta estera, la ricerca ha per iscopo di trovare per qual via si possa ricavare dalla riscossione la maggior somma in moneta nazionale.

Esempio. Un negoziante di Torino, volendo riscuotere un credito di 5000 talleri prussiani a Berlino, desidera sapere quale fra i quattro seguenti modi sia più vantaggioso: 1° Trarre dal diretto, che può negoziare a Torino a lire 370; 2° Farsi rimettere del diretto, che verrà pagato a Berlino talleri 81; 3° Trarre per la via di Pietroborgo a lire 400, essendo il cambio di questa piazza con Berlino a 108; 4° Farsi rimettere per la via di Vienna a talleri 100, il cambio di Vienna con Torino essendo 40,35.

Si paga a Pietroborgo $^1/_2$ $^0/_0$ di provvigione, ed a Vienna $^1/_4$ $^0/_0$.

1° *Tratta diretta*	2° *Rimessa diretta*
Lire it. x = 5000 Talleri	Lire it. x = 5000 Talleri
100 = 370 ll. it.	81 = 300 ll. it.
x = 18500 ll. it.	x = ll. 18518,51.
3° *Tratta ind. per Pietroborgo*	4° *Rimessa ind. per Vienna*
Lire it. x = 5000 Talleri	Lire it. x = 5000 Talleri
108 = 100 Rubli	100 = 150 Fior. n.
100 = 400 ll. it.	40,35 = 100 ll. it.
100 = 99 $^1/_2$	100 = 99 $^3/_4$
x = ll. 18425,92	x = ll. 18540,89.

Il modo più vantaggioso al negoziante per riscuotere il suo credito è di farsi rimettere per la via di Vienna.

Osservazione. — Se i 5000 talleri fossero un debito che il negoziante di Torino dovesse pagare, la via più vantaggiosa per lui sarebbe la tratta di Pietroborgo.

777. — **3° *Caso.*** Quando si vuole speculare sopra i corsi di cambio, la ricerca volge sulla via da tenersi per avere da sì fatta speculazione il maggior guadagno possibile.

Ora, siccome il negoziante speculatore compra le merci sulla

piazza ove si hanno a più basso prezzo, e le vende su quella in cui il prezzo loro è più alto; così il banchiere speculatore deve fare rimesse (759) sulla piazza in cui il cambio è basso, e spiccare tratte (ibid.) su quella il cui cambio è più alto; o in altri termini:

Per rimettere, il cambio più vantaggioso è il più basso, e per trarre, il cambio più vantaggioso è il più alto.

1° *Esempio.* Un banchiere di Genova avendo sott'occhio il listino della sua piazza e quello di Amsterdam, entrambi del tenore qui appresso, desidera sapere se, invece di rimettere o trarre direttamente su Amsterdam, non avrebbe maggior vantaggio di farlo per una delle vie indirette di Amborgo, Londra o Vienna.

Listino di Genova	
Amborgo	188
Amsterdam	212
Londra	25
Vienna	248

Listino di Amsterdam	
Amborgo	36
Genova	48
Londra	12,50
Vienna	118,40

In questo quesito trattasi di cercare da prima a quanto risulti il cambio indiretto tra Genova e Amsterdam, successivamente per ciascuna delle suddette piazze intermedie (771-3° Es.). Quindi converrà arbitrare, fra tutti questi prezzi indiretti ed il cambio diretto, qual sia più vantaggioso per rimettere o trarre da Genova su Amsterdam.

Per Amborgo	*Per Londra*	*Per Vienna*
11. x = 100 Fior. oland.	11. x = 100 F. oland.	11. x = 100 F. oland.
36 = 40 Marc. b°	12,50 = 1 Lira st.	118,40 = 100 F. nuovi
100 = 188 Lire it.	1 = 25 Lire it.	100 = 248 Lire it.
x = 208,88 11.	x = 200 11.	x = 209,45 11.

Il banchiere deve scegliere, per rimettere, la via indiretta per Londra, e per trarre, la via diretta; perchè il cambio diretto 212 è il più alto, e l'indiretto per Londra 200 è il più basso (768).

2° *Esempio.* Si vuol sapere quale sia la via più vantaggiosa per rimettere o trarre da Amborgo su Parigi, i listini di queste due piazze essendo come segue:

Listino di Parigi	
Amborgo	187
Berlino	370
Londra	25,10
Pietroborgo	399

Listino di Amborgo	
Parigi	187,50
Berlino	152
Londra	13 1/4
Pietroborgo	34.

Poichè l'operazione si fa in Amborgo, la qual piazza dà a Parigi il certo che è 100 M. b.°, bisogna cercare in franchi il valore di questa somma, come nel problema precedente; ma il cambio più alto sarà quello espresso dal più basso incerto (768).

Per Berlino	*Per Londra*	*Per Pietroburgo*
Fr. x = 100 M. b°	Fr. x = 100 M. b.°	Fr. x = 100 M. b°
300 = 152 Tall.	13. $^1/_4$ = 1 Lira st.	1 = 16 Scell. b°
100 = 379 Fr.	1 = 25,10 Fr.	34 = 1 Rublo.
		100 = 399 Fr.
x = 187,46 Fr.	x = 189,43 Fr.	x = 187, 76 Fr.

Il prezzo dei Franchi in Amborgo è più basso per la via di Londra, ed è più alto per quella di Berlino. Lo speculatore di Amborgo dovrà dunque scegliere la prima di queste due piazze per rimettere a Parigi, e la seconda per farvi tratte.

Problemi sull'Arbitrato.

913. Severini di Genova domanda qual via gli sia più vantaggiosa per riscuotere un credito di 18000 talleri a Berlino: se trarre una cambiale ch'ei potrebbe negoziare a ll. 369, ovvero chiedere al debitore una rimessa, che può acquistarsi a Berlino per tall. 81 $^1/_2$.

914. Se rimetto a Francoforte, i fiorini costano 208, se di là mi faccio trarre, le lire it. saranno ivi negoziate a 93 $^1/_2$; quale di questi due modi mi è più vantaggioso per estinguere un debito di 15000 fiorini a Francoforte?

915. Davay di Parigi volendo riscuotere in Olanda 600 fiorini, cerca il più conveniente di questi due modi: o trarre direttamente al cambio 211 $^1/_2$, o indirettamente per Londra, il cambio di Parigi su Londra essendo 25,10, quello di Londra con Amsterdam 12 $^1/_2$, e la provvigione $^1/_2$ $^0/_0$.

916. Silvestri di Torino vuole estinguere un debito di fiorini, 2000 a Francoforte. Siccome ha in portafogli fiorini acquistati a 213 $^3/_4$, marchi banco a 186 $^1/_2$, e ll. sterline a 24,90, egli cerca se invece di spedire la carta diretta, cioè i fiorini, non avrebbe maggior vantaggio spedendo o l'Amborgo o il Londra, potendo queste *divise* negoziarsi a Francoforte, la 1ª a 87 $^1/_2$. e la 2ª 117 $^1/_2$.

917. Gottlieb di Amborgo mi deve 2000 Marchi banco. Se traggo direttamente, ottengo il cambio di 187 $^1/_5$, e se traggo su Londra per conto di Gottlieb, posso negoziare le lire sterl. a 24,95. Quale dei due modi mi conviene scegliere, se a Londra il cambio su Amborgo è 13 $^1/_2$ e la provvigione $^1/_4$ $^0/_0$.

918. Un banchiere di Lione vuol trarre 1088 fiorini sopra Amsterdam, o direttamente al cambio 213, o per la via di Cadice, i cambi di Amsterdam e di Lione con Cadice essendo rispettivamente fiorini 237 e franchi 522,50 per cento piastre, e la provvigione a Cadice $^1/_2$ $^0/_0$. Qual via gli è più vantaggiosa?

919. Jaquet di Parigi volendo rimettere 600 fiorini in Amsterdam, cerca se più gli convenga la via diretta al cambio 211 $^1/_2$, o l'indiretta per Londra, ove si paga $^1/_2$ $^0/_0$ di provvigione, essendo il cambio di Parigi con Londra 25,10, e quello di Amsterdam con Londra 12 $^1/_2$.

920. Stephen di Londra mi deve 2000 lire sterl., ch'io potrei negoziare a 25,20; ma desidero prima sapere se non sia più vantaggioso farmi rimettere una delle seguenti *divise* indirette, cioe: Berlino a 6 $^4/_5$, Amborgo a 13 $^4/_8$, Francoforte a 119, o Pietroborgo a 38, sapendo che a Torino posso negoziare la 1ª a 371, la 2ª a 187, la 3ª a 211, e la 4ª a 397.

921. Un negoziante di Genova a cui sono dovuti 3000 Marchi banco in Amborgo, desidera sapere se più gli convenga trarre direttamente, oppure per la via di Londra, i cambi essendo: Genova con Amborgo 187,25 Genova con Londra 25,22, Londra con Amborgo 13 $^1/_2$ e la provvigione a Londra $^1/_2$ $^0/_0$.

922. Per estinguere un debito di 3000 Marchi banco in Amborgo, un negoziante di Genova può rimettere per le stesse vie ed alle stesse condizioni del problema antecedente; qual via gli è più vantaggiosa e di quanto?

923. Pietrini di Torino può estinguere un debito di 1500 Marchi banco in Amborgo rimettendo direttamente a 190, o indirettamente per Amsterdam: qual via gli converrà scegliere, se il cambio di Torino con Amsterdam è 214, quello di Amsterdam con Amborgo 34, e la provvigione $^1/_4$ $^0/_0$?

924. Dubois di Parigi ha un debito a Berlino di 4000 talleri, ch'ei può estinguere per la via diretta col *rimettere* o *farsi trarre*, oppure per la via di Amborgo in uno dei quattro modi seguenti: 1° *Rimettere* ad Amborgo con ordine ivi di *rimettere* a Berlino; 2° *Rimettere* ad Amborgo con ordine a Berlino di *trarre* su Amborgo; 3° Dare ordini ad Amborgo di *rimettere* a Berlino e di *trarre* su Parigi; 4° Dare ordine ad Amborgo di *trarre* su Parigi ed a Berlino di *trarre* su Amborgo.

Si chiede di arbitrare fra queste 6 vie, i cambi essendo:

A Parigi — Amborgo 187,50, Berlino 372,25;
Ad Amborgo — Parigi 187,75, Berlino 153;
A Berlino — Parigi 80,8, Amborgo 152,50

925. Un negoziante di Torino può estinguere a Pietroborgo un debito di 2800 rubli, o direttamente, o per la via di Amsterdam con $^3/_4$ $^0/_0$ di provvigione. Si arbitri fra le *sei* vie possibili, come nel problema precedente, i cambi essendo:

A Torino — Amsterdam 213,90, Pietroborgo 399;
In Amsterdam — Torino 46, Pietroborgo 183,72;
A Pietroborgo — Torino 401, Amsterdam 190.

926. Benoit di Parigi, che deve 1800 talleri a Berlino, può operarne il saldo, o per la via diretta, o per una delle tre indirette, Londra, Amborgo e Amsterdam. Cerchisi quale debba egli preferire se la provvigione è di $^1/_2$ $^0/_0$ a Londra ed in Amsterdam, di $^3/_4$ $^0/_0$ in Amborgo, ed i cambi sono come segue e reciproci (*).

(*) Allorchè fra due piazze i cambi sono *reciproci*, non si fa luogo all'arbitrato fra il trarre o farsi rimettere, nè fra il rimettere o farsi trarre; chè l'uno e l'altro conducono al medesimo risultato.

A Parigi — Londra 25, Amborgo 187, Amsterdam 210, Berlino 366,25.

A Berlino — Londra 6 $^{5}/_{8}$, Amborgo 152,05, Amsterdam 143,54.

927. Deborne di Parigi può riscuotere in Amborgo un credito di 3000 Marchi banco, o per la via diretta, o per quella di Amsterdam. Si domanda quale più gli convenga, i cambi essendo come segue e reciproci.

A Parigi — Amborgo 190, Amsterdam 214.

In Amborgo— Amsterdam 34.

928. Un banchiere di Berlino volendo formarsi un credito di 25000 rubli a Pietroborgo, a fine di potervi trarre nelle occorrenze, cerca la via più conveniente fra la diretta e quelle di Francoforte, Parigi, Londra, Amborgo ed Amsterdam, i cambi essendo come segue e reciproci.

A Berlino — Pietroborgo 108, Francoforte 57,20, Parigi 81, Londra 6,80, Amborgo 151,60, Amsterdam 141,70.

A Pietroborgo — Francoforte 188, Parigi 400, Londra 38, Amborgo 34, Amsterdam 190.

929. I cambi essendo come qui appresso e reciproci, un banchiere di Londra chiede qual via gli convenga scegliere per formarsi un credito di 60000 franchi a Parigi.

A Londra — Parigi 25,30, Pietroborgo 38 $^{1}/_{5}$, Francoforte 119 $^{1}/_{4}$, Berlino 6 $^{9}/_{10}$, Amborgo 13 $^{3}/_{4}$, Amsterdam 12 $^{1}/_{2}$.

A Parigi — Pietroborgo 400, Francoforte 211,70, Berlino 370,40, Amborgo 187,30, Amsterdam 211

930. I corsi dei cambi essendo a Parigi ed a Londra come qui appresso, si domanda se un banchiere di Parigi, invece di *trarre* o di *rimettere* direttamente su Londra, non avrebbe maggior vantaggio in farlo per una delle vie indirette, Amborgo, Amsterdam o Vienna.

A Parigi — Londra 25, Amsterdam 210 $^{1}/_{2}$, Amborgo 187,30, Vienna 246,90.

A Londra — Amsterdam 12, Amborgo 13, Vienna 10.

931. Giusta i cambi qui appresso, chiedesi se un banchiere di Parigi debba *trarre* su Amsterdam direttamente, o per una delle vie seguenti: Londra, Madrid, Amborgo e Lisbona; ed anche per quale di dette vie gli convenga *rimettere*.

A Parigi — Amsterdam 208, Londra 24, Amborgo 186, Madrid fr. 534 per 100 piastre, Lisbona fr. 600 per 100 milreis.

In Amsterdam — Londra 11, Amborgo 34, Madrid fior. 254 per 100 piastre, Lisbona fior. 286 per 100 milreis.

932. Arbitrare tra Parigi ed Amborgo come nel problema precedente, i cambi essendo:

A Parigi —Amborgo 188, 20, Amsterdam 212,10, Londra 27, Madrid fr. 540 per 100 piastre, Lisbona fr. 605 per 100 milreis.

In Amborgo — Amsterdam 37, Londra 14, Madrid piastre 35 per 100 Marchi banco, Lisbona milreis 31 per 100 Marchi banco.

933. Sandri di Torino, per riscuotere un credito di 36000 rubli a Pietroborgo, ordina al debitore di rimettere a Parigi a 402; il corrispondente di Parigi rimette a Berlino a 372; quel di Berlino rimette a Francoforte a 58; quel di Francoforte rimette a Londra a 120, e finalmente quel di Londra riceve l'ordine da Sandri di rimettergli del diretto a 26. Cerchisi: 1° quanto incasserà Sandri per questa via, computando $^5/_4$ % di spese; 2° quanto incasserebbe traendo direttamente a 402,60; 3° quanto facendosi rimettere direttamente a 403.

934. Gonnet di Parigi riceve da Molina di Genova l'ordine di trarre su Londra a 25,15, e rimettergli in ritorno carta su Berlino acquistata a 369. Alla ricevuta dell'ordine, Gonnet non può trarre su Londra che a 25,05; si domanda a qual cambio dovrebbe procurarsi la rimessa su Berlino per compensare la deficenza sul cambio della tratta.

935. Un banchiere di Londra riceve da un suo corrispondente di Parigi l'ordine di rimettergli carta su Amborgo a 13 Marchi banco 8 scell., e di rivalersi su Genova a 25,30. Al giungere dell'ordine l'Amborgo è disceso a 12; a qual cambio dovrà egli trarre su Genova?

936. I listini di Genova, Berlino e Vienna portando fra gli altri i cambi qui appresso, un banchiere di Genova vuol sapere se vi sia luogo a speculazione sulle monete russe. A tal uopo ei cerca il cambio di Genova con Pietroborgo: 1° per la via di Berlino, sì al corso di Genova, come a quello di Berlino; 2° per la via di Vienna, sì al corso di Genova, come a quello di Vienna. Dopo ciò in qual modo si potrà fare la speculazione?

A Genova — Berlino 370, Vienna 257, Pietroborgo 400.
A Berlino — Genova 80, Pietroborgo 105.
A Vienna — Genova 38 $^1/_3$, Pietroborgo 155 $^3/_4$.

937. Si domanda: 1° In qual modo potrebbe effettuarsi la speculazione precedente, senza che il banchiere di Genova si rivolgesse a Pietroborgo, ma adoperando soltanto la mediazione dei corrispondenti di Vienna e Berlino; 2° Qual sarebbe il benefizio percentuale, computando $^1/_2$ % di provvigione a Vienna ed a Berlino, e gl'interessi 4 $^1/_2$ % della somma impiegata durante l'operazione, la quale è supposta durante 20 giorni.

938. Dicasi: 1° In qual modo può farsi la medesima speculazione, trattando col solo corrispondente di Pietroborgo, senza la mediazione di que' di Vienna e Berlino, supposto che oltre i cambi del problema n° 936, quello di Vienna sia segnato a Pietroborgo 157 $^1/_2$; 2° Operando in questo modo, qual sarebbe il benefizio percentuale, computato $^1/_2$ % di provvigione a Pietroborgo, $^1/_4$ % di spese a Genova, e gl'interessi come nel problema precedente.

Problemi di Ricapitolazione sulla IIIª Parte.

939. Alla porta d'una chiesa sogliono trarre due poverelli, cioè una femminetta ogni dì, ed alternativamente un cieco ed un zoppo. Una caritatevole dama manda quivi il figliuolo con 52 lire dicendogli: se trovi la poveretta ed il cieco, darai a questo i $^3/_4$ della somma ed alla donna $^1/_4$; se invece trovi lo zoppo gli darai solo $^1/_4$ della somma ed alla femminetta i $^3/_4$. Per caso vi si trovarono quel giorno tutti e tre; qual limosina riceverà ciascuno?

940. Stando per fare testamento, un genitore riceve l'infausta notizia essere morto uno dei due figliuoli, entrambi nell'esercito. Incerto qual sia il superstite, ei dispone de' suoi averi così: la figliuola avrà $^1/_3$ od i $^2/_5$ delle sostanze, secondo che sarà trovato vivo il maggiore od il minore; il rimanente spetterà al figliuolo superstite. Morto il genitore vien riconosciuto essere falsa la recata notizia, ed i figliuoli vivere ambedue; in qual modo dovrassi ripartire l'eredità?

941. Si cerchi in qual proporzione debbansi mescolare i vini di Bordeaux, di Borgogna, di Costanza, di Malaga, di Oporto e di Champagne, affinchè la densità del miscuglio sia 1, sapendo che le rispettive densità de' suddetti vini sono: 0,993; 0,991; 1,081; 1,022; 0,997, 0,997.

942. L'aria atmosferica consta d'ossigeno e d'azoto; cerchisi in qual rapporto di volume vi entrino questi due gaz, sapendo che la densità del primo è 1,1056 e quella del 2° 0,9714 rispetto all'aria.

943. Gerone, re di Siracusa, avendo consegnato 5 Cg. d'oro ad un orefice per fare una corona, questa trovossi realmente di 5 Chilogr.; ma il re sospettando frode consultò Archimede. Costui, sapendo che l'oro perde nell'acqua $^{52}/_{1000}$ del suo peso, e l'argento $^{95}/_{1000}$, scoprì l'inganno col pesare nell'acqua la corona, la quale fu trovata Cg. 4 $^{11}/_{16}$. Cerchisi quanto oro e quanto argento essa contenesse.

944. Perotti di Torino chiede se gli torni più a conto comprar grano in Odessa a rubli 8 $^1/_2$ il tschetwert, oppure in Costantinopoli a 25 piastre il kilò, sapendo che le spese di nolo e di assicurazione ascendono per Odessa a 7 $^2/_5$ %, e per Costantinopoli a 6 %.

945. Worker di Londra mi spedì 3360 libbre di lana, da lui pagata 1 scellino e 2 denari la libbra, oltre lire sterl. 3, scell. 8, den. 6 per carico e nolo. Quante lire sterl. guadagnerà se gli rimetto una cambiale di lire it. 6493,50, che egli negozia al cambio di 26?

946. Si domanda qual somma abbia messo in società ciascuno dei negozianti *A* e *B*, sapendo che la posta del 1°, infe-

riore all'altra di ll. 250, è rimasta in traffico mesi 4 $^3/_4$, quella del 2° mesi 3 $^1/_6$, e che le quote di guadagno furono uguali.

947. Le poste di due soci sommano a ll. 5000, il guadagno a ll. 1000, e viene diviso in parti uguali; si domanda la posta di ciascuno, essendo quella del 1° rimasta in traffico 5 mesi, e quella del 2° 3 mesi.

948. Ad un giovane che compie i 13 anni, viene lasciata una annualità di ll. 273, la quale frutta 5 $^0/_0$ interesse composto; quanto avrà egli a 21 anno?

949. Quanto aveva costato una merce, se nel rivenderla si ebbe ll. 16 di perdita, perdendo 10 $^0/_0$?

950. Greatheed di Londra deve rimettere a Roma lire sterl. 100 e denari 16, al cambio di 4 scell. 2 den. per 1 scudo; qual somma deve esprimere la cambiale?

951. Una lega composta d'oro, argento e rame, pesa 100 Cg. e sposta Cg. 6,674 d'acqua. Sapendosi che, a peso uguale, l'oro ne sposterebbe Cg. 5,20, l'argento 9,55, il rame 11,24, si cerchi quanto di ciascun metallo entri nella lega.

952. Una cambiale di ll. 1570,55, tratta il 30 dicembre a 3 mesi di data, viene scontata a 3 $^1/_2$ $^0/_0$ il 10 gennaio; qual somma si paga?

953. Gastone mi deve 500 ll. pagabili il 2 febbraio; ma non potendo egli soddisfarmi a tal epoca, gli concedo dilazione mediante l'interesse semplice 5 $^0/_0$; con ciò ei mi dà ll. 80 il 9 marzo, ll. 115 il 15 maggio, ll. 25 il 1° giugno, ed il rimanente del capitale in un con tutti gli interessi il 14 agosto. Di quanto fu quest'ultimo pagamento?

954. La polvere da cannone è composta di salnitro, carbone e zolfo, nella proporzione di 76, 14, 10; quanto di ciascuna materia entra in 250 Cg. di detta polvere?

955. Quant'oro fino e quanta lega evvi in una lira sterlina? (V. la Tav. p. 328).

956. L'acqua essendo composta d'ossigeno e d'idrogeno, nella proporzione di 88,9 e 11,1 del suo peso, si domanda quanti chilogrammi di ciascun gaz siano in 1000 Cg. d'acqua.

957. Un fallito deve ll. 2400 a *X*, 1600 a *Y*, e 1500 a *Z*; quanto spetta a ciascun creditore sulle 3300 lire che ancora possiede il fallito?

958. Nel far testamento, Petronio lasciò ll. 2800 ad *A*, 2000 a *B*, 1600 a *C*, 1400 a *D* e 1200 a *E*; ma alla sua morte si riconosce che il montare de' suoi averi è soltanto ll. 6235. Quanto avrà ciascun erede?

959. Quanto stagno e quanto rame havvi in una campana di 130 Cg., se questi metalli vi entrano nella proporzione di 1 a 3?

960. Una proprietà, che frutta annualmente ll. 23400, è tassata per ll. 1370; se io ne compro una parte il cui reddito annuo è 1430, di qual tassa verrò gravato?

961. Sono debitore di ll. 630 pagabili fra 3 mesi, ll. 300 fra

6 mesi, 500 fra 7 e 900 fra 8; ma preferisco saldar il mio debito in un sol pagamento: quando debbo effettuarlo?

962. Polifemo compra merci da pagarsi come segue: ll. 500 il 1° maggio, 640 il 4 giugno, 860 il 1° agosto, e 900 il 5 settembre. A qual epoca dovrebbe egli sborsarne il montare, ove facesse un sol pagamento?

963. All'equipaggio d'un vascello viene assegnato un premio di ll. 40000, da ripartirsi in ragione dello stipendio e degli anni di servizio d'ogni individuo. Ora sonvi a bordo: 6 ufficiali da 6 mesi, aventi 120 ll. il mese; 12 luogotenenti, da 4 mesi, con 40 ll. il mese, e 110 marinai, da 3 mesi, i quali hanno 30 ll. il mese. Quanto riceverà ciascuno?

964. Se una famiglia di 13 persone spende ll. 1310,40 in 8 mesi pel pane, allorchè costa ll. 0,35 il Cg., quanto spenderà in 9 mesi un'altra famiglia di 12 membri, ove il pane costi ll. 0,40?

965. Se 15 operai ricevono ll. 180 per 6 giornate di 10 ore, quanto dovrassi dare a 12 operai per giornate 18 $^1/_3$ di 9 ore?

966. Il reddito d'un podere di Ea. 5,27 ascende a ll. 1000; quanto dovrebbe rendere un altro podere di Ea. 3,30, il quale in fertilità, sta al primo :: 7 : 6?

967. Con tre sorta di caffè, i cui prezzi sono: ll. 2,50, lire 1,90, e ll. 1,20 la libbra, vuolsi fare 64 libbre di miscuglio da vendersi ll. 1,50; quanto d'ogni qualità dovrassene prendere?

968. Un negoziante deve pagare ll. 1000 al terminar d'ogni anno, ma per bisogno di danaro, chiede una sospensione di 8 anni, dopo i quali pagherà gli arretrati coll'interesse semplice 5 %; quanto dovrà egli a tal epoca?

969. A quanto monta in capo a 6 anni la somma di 20000 lire collocata ad interesse composto 5 %?

970. Un negoziante di Pietroborgo deve pagare un debito di 1000 talleri a Berlino; quanto gli costerà una rimessa indiretta per la via di Amsterdam, essendo il cambio di Pietroborgo con Amsterdam 190, e quello con Berlino 35?

971. In quanto tempo si estinguerebbe un debito di 400000 lire co' suoi interessi composti 5 % pagando alla fine d'ogni anno ll. 25000?

972. Levi doveva 2400 ll. pagabili fra 5 anni, ma egli ottenne di pagarle dopo 2 anni, e godere lo sconto 4 %; quanto sborsò?

973. Compro per ll. 2808 di merci da pagarsi fra 3 anni e 8 mesi coll'interesse 5 $^1/_2$ %; quanto dovrò sborsare a tale epoca?

974. Voglio far scontare da un banchiere due effetti, il 1° di ll. 6000 scadente fra 8 mesi, il 2° di ll. 27000 pagabile in 4 mesi. Quanto riceverò, essendo lo sconto al 6 % all'anno?

975. Un debito di ll. 2592 venne pagato 4 anni prima della scadenza con deduzione dello sconto composto 4 $^1/_2$ % all'anno; quanto sborsò il debitore?

976. Un certo capitale, aumentato dagli interessi semplici, va-

leva ll. 1235 dopo 5 mesi e ll. 1312 dopo 16 mesi. Domandasi detto capitale e la tassa.

977. Di quanto venne anticipato il pagamento d'un debito di ll. 1344, se godendo lo sconto 3 %, il debitore sborsò soltanto 1200 lire?

978. La somma di ll. 10000, impiegata parte a 5 % e parte 6 %, fruttò ll. 1620 in 3 anni. Quanto è ciascuna parte?

979. Avendo tolto in prestito ll. 11000, dovrei pagare una rendita annua di 495 ll.; ma preferisco pagare gl'interessi composti alla medesima tassa, e sdebitarmi in 5 anni, pagando al termine d'ogni anno una stessa somma. Qual dev'essere questa somma?

980. Qual annualità devesi pagare alla fine d'ogni anno per estinguere in 5 pagamenti il capitale di 3310 lire co' suoi interessi composti 6 %?

981. Ho venduto merci per ll. 3000, che il compratore si offre di pagare come segue: ll. 1000 in pronti contanti e 2300 fra 3 anni, ovvero ll. 2330 fra 4 anni e 1240 dopo 5 anni. Qual partito mi torna più vantaggioso e di quanto, calcolando l'interesse composto 4 %?

982. Rivendendo una merce ll. 753 più di quanto aveva costato, si guadagnò 15 %. Qual era il prezzo di compera?

983. Due vetture partono allo stesso tempo dalle falde opposte di una montagna e giungono alla sommità nel medesimo istante; le difficoltà delle strade essendo :: 4 : 3, e gli spazi percorsi :: 9 : 10, cerchisi il rapporto delle velocità.

984. Ansaldi di Torino fa acquistare a Parigi 3800 fr. di rendita francese 3 % al corso 68,80 ; quante lire it. deve pagare essendo il cambio su Parigi $^3/_8$ % sopra il pari?

985. Lamberti di Genova spende lire it. 50000 nel comprar rendita inglese 3 % al corso 87,50: quante lire sterline di rendita si procurerà, se il cambio è 25,25 e la provvigione $^1/_2$ %?

986. Una corona composta d'oro e d'argento pesa nell'aria 10 Cg. e nell'acqua 9,375; si domanda quanto contenga di ciascun metallo, essendo la densità dell'oro 19,6 e quella dell'argento 10,5.

987. Una composizione di piombo e di stagno pesante 120 Cg. perde nell'acqua 14 Cg; si domanda quanto contenga di ciascun metallo, sapendo che 36 Cg. di piombo ne perdono 5, e 23 di stagno ne perdono 2.

988. Diciotto operai fanno il $^1/_3$ d'un lavoro in 28 giorni e $^1/_2$; licenziando 4 di essi, in quanto tempo si compirà il lavoro?

989. La ruota minore d'una vettura ha piedi 2 $^7/_8$ di diametro, e la maggiore 5 $^1/_2$: quanti giri farà questa mentre l'altra ne fa 9460?

990. *Y* deve pagare a *Z* 5400 ll. fra 5 mesi; ma ottiene di sborsare al presente ll. 3600 e ritardare il rimanente fino a compensazione degl'interessi. A qual epoca farà l'ultimo pagamento?

991. *A* e *B* avendo impiegato i loro capitali, il 1° a 4 $^1/_2$ %, ed il 2° a 6 %, quegli ritrasse dopo 5 anni 9 mesi ll. 5222,61 tra capitale ed interessi semplici, e questi altrettanto dopo 4 anni. Si domanda quanto ciascuno avesse imprestato.

992. Una cambiale di L. 1500 pagabile il 3 novembre venne scontata con ll. 1451,25 il 7 maggio; qual era la tassa dello sconto?

993. Aminta ha 1200 lire di rendita 5 % sullo Stato; qual è il valore presente del suo titolo, se il corso è 94,20?

994. Comprai ll. 1585 di rendita 5 % a 102; a quanto debbo rivenderla per guadagnare 1000 lire?

995. I caratteri tipografici sono composti di 20 parti d'antimonio, 80 di piombo e 5 di rame; quanto vale il chilogramma di questa lega, posto che il 1° metallo costi ll. 1,80 il Cg., il 2° ll. 1,60 ed il 3° ll. 3?

996. Di tre soci, il 1° somministra del panno ed il 2° 1000 lire; fatto un guadagno di ll. 2000, il 1° ne riceve 800 ed il 3° 700. Si domanda il valore del panno, la posta del 3° socio ed il guadagno del secondo.

997. Con 20 pezze, parte da 5 e parte da 2 lire, vuolsi formare la somma di ll. 82; quanto di ciascuna specie si potranno prendere?

998. Un litro d'ossigeno pesa gr. 1,42975, ed uno d'idrogeno gr. 0,08936; trovisi il volume di ciascuno di questi gaz contenuto in un litro d'acqua, la quale si compone dei medesimi gaz nel rapporto (in peso) di 100 a 12,50.

999. In tre pozzi artesiani, le cui profondità sono rispettivamente m. 220, m. 395 e m. 543, la temperatura dell'acqua fu trovata, nel 1° gradi 19,75 nel 2° 25,33 e nel 3° 30,50. Chiedesi se l'aumento di temperatura sia esattamente proporzionale all'aumento di profondità, ed in caso contrario, qual dovrebbe essere la temperatura del 3° pozzo, perchè la proporzione possa avere luogo.

1000. Al primo muoversi d'una macchina le sue quattro ruote aprono ciascuna una valvola, che poi apriranno ad ogni giro. Ora, la 1ª facendo 5 giri in 7 minuti, la 2ª 12 in 35, la 3ª 17 in 36 e la 4ª 15 in 64, si domanda quanto tempo trascorrerà prima che tutte le ruote aprano di nuovo contemporaneamente la loro valvola.

TAVOLA

DELLE PRINCIPALI MISURE

degli Stati d'Europa (*).

Italia, Francia e Belgio.

Sistema Metrico decimale *(V. pag. 172 e seguenti).*

Danimarca.

Lunghezza.	*Alen*, auna, = 2 *fod*, piede, di 12 *tommer*, pollici, (la *rode*, tesa, = 12 *fod*) = ...	*met.*	0,62771.
Capacità (**)	*Tonde* = 8 *skjaepper*, staio, di 4 quarti (12 *tonde* = 1 *laest*) = ...	*lit.*	139,1213.
	Ahm = 155 *pott* (2 *pott* = 1 *kande*) = ...	»	149,7486.
Peso.....	*Pund* = 16 *unzer*, once, di 2 *lod* da 4 *quintin* =	*gr.*	500,000.
Monetarie...	*Ristallero* = 6 marchi di 16 scellini = ...	*L. it.*	2,809084.
	Si coniano Ristalleri 18 1|2 da 1 Marco *di Colonia* (gr. 233,8555) *di argento fino.*		

Germania.

(Amburgo)

Lunghezza.	*Elle*, auna, = 2 *fuss* (6 *fuss* = 1 *klafter*, tesa) =	*met.*	0,57314.
Capacità....	*Scheffel*, staio, = 2 *fass* di 2 *himten* da 4 *spint* =	*lit.*	109,923.
	Ohm = 4 *anker* = 5 *eimer* = 20 *viertel* =	»	144,91.
Peso.....	*Pfund*, libbra, = 10 *neuloth* di 10 *quentin* (100 libbre = 1 *centner*) = ...	*gr.*	500,000.
Monetarie...	*Marco Banco* (moneta di conto) = 16 scellini di 12 denari = ...	*L. it.*	1,872722.
	Marco corrente (moneta effettiva) = ...	»	1,4847968.
	Marchi b. 27 3|4 = 35 *Marchi c.* = *il peso di* 1 *marco di Colonia* (gr. 233,8555) *d'argento fino.*		

(*) Questa Tavola venne compilata col sussidio de' più accreditati Autori, sì nazionali come stranieri, fra i quali ci rechiamo a dovere di noverare: 1° Filippo Parmetler, *Elementi di Computisteria*; 2° Guillaumin et C.ie, *Dictionnaire universel du Commerce et de la Navigation;* 3° Christian und Friedrich Noback, *Münz-Maass-und Gewichtsbuch.*

Il valore in Lire it. di ciascuna moneta estera fu da noi calcolato con molta accuratezza, giusta i tagli ed i titoli espressi nella tavola stessa, e tolti dai suddetti Autori.

(**) Delle due misure di capacità indicate in ogni Stato, la prima è per gli aridi, e la seconda pei liquidi.

(Berlino).

Lunghezza	*Elle* = 25 1|2 *zoll*, pollici, = 2 1|8 *fuss* di 12 *zoll* = ...	*met.*	0,66694.
Capacità	*Scheffel* = 4 *viertel* di 4 *metzen* (24 *scheffel* = 1 *Wispel*) = ...	*lit.*	54,9615.
	Eimer = 2 *anker* = 60 *quart* (2 *eimer* = 1 *ohm*) = ...	»	68,7019.
Peso	*Pfund*, libbra nuova, = 32 *loth* di 4 *quentchen* (100 lib. = 1 *centner*) = ...	*gr.*	500,000.
Monetarie	*Tallero* = 30 *silbergroschen* di 12 *pfennige* =	*L. it.*	3,7037037.
	Si coniano Talleri 30 *da* 1 *libbra nuova* (gr. 500) *di argento fino.*		

(Brema).

Lunghezza	— *Elle* = 2 *fuss* di 12 *zoll* = ...	*met.*	0,5787
Capacità	*Scheffel* = 4 *viertel* di 4 *spind* = ...	*lit.*	74,10387.
	Ohm = 4 *anker* di 4 *quart* = ...	»	144,9648.
Peso	*Pfund*, libbra nuova, = 10 *neuloth* di 10 *quentin* (100 lib. = 1 *centner*) = ...	*gr.*	500,000.
Monetarie	*Tallero d'oro* (moneta di conto) = 72 *groten* di 5 *schwaren* = ...	*L. it.*	4,067146.
	Pistola o *Luigi d'oro* (moneta reale) = 5 talleri =	»	20,33573.
	Si coniano Pistole 39 5|9 *da* 1 *marco di Colonia di oro fino.*		

(Francoforte sul Meno).

Lunghezza	— *Elle* (1 *fuss*, piede, = m. 0,28461) = ...	*met.*	0,5473.
Capacità	*Malter* = 4 *simmer* di 4 *sechter* da 4 *gescheid* =	*lit.*	114,729.
	Ohm = 20 *viertel* (8 *ohm* = 1 *stuckfass*) = .	»	143,4107.
Peso	*Pfund*, libbra nuova, = 32 *loth* di 4 *quentchen* (100 lib. = 1 *centner*) = ...	*gr.*	500,000.
Monetarie	*Fiorino del Sud* = 60 *kreuzer*, carantani, di 4 *pfennige* = ...	*L. it.*	2,1164021.
	Si coniano Fiorini 52 1|2 *da* 1 *libbra* (gr. 500) *di argento fino.*		

(Lubecca).

Lunghezza	— *Elle* = 2 *fuss* di 12 *zoll* da 12 *linien* = ...	*met.*	0,5752.
Capacità	*Scheffel* = 4 *fuss* = ...	*lit.*	34,694.
	Ohm = 4 *anker* di 5 *viertel* = ...	»	149,02.
Peso	*Pfund* = 32 *loth* di 4 *quentchen* (112 *pfund* = 1 *centner*) = ...	*gr.*	486,474.
Monetarie	*Marco corrente* = 16 scellini = ...	*L. it.*	1,4847968.
	Si coniano Marchi correnti 35 *da* 1 *Marco di Colonia di argento fino.*		

(Monaco).

Lunghezza	*Elle* (1 *fuss* = m. 0,291859; 1 *klafter* = 6 *fuss*) = ...	*met.*	0,833015.
Capacità	*Scheffel* = 6 *metzen* di 2 *viertel* = ...	*lit.*	222,357.
	Schenk-Eimer = 60 *maass* di 4 *quartel* = ..	»	64,1416.
Peso	*Pfund* = 32 *loth* di 4 *quentchen* (100 *pfund* = 1 *centner*) = ...	*gr.*	500,000
Monetarie	— Come a Francoforte.		

(Vienna).

Lunghezza . —	*Elle* = *fuss* 2,463 (1 *klafter* = 6 *fuss*) = ..	*met.*	0,77921.
Capacità	*Metzen* = 2 *halbe* di 2 *viertel* da 2 *achtel* (30 *metzen* = 1 *muth*) = ...	*lit.*	61,5045.
	Eimer = 40 *maass* di 2 *halbe* da 4 *seitel* (32 *eimer* = 1 *fuder*) = ...	»	36,6052.
Peso.....	*Pfund* = 32 *loth* di 4 *quentchen* (il *pfund* di dogana = gr. 500) = ...	*gr.*	560,012.
Monetarie...	*Fiorino nuovo* = 100 soldi nuovi = ...	*L.it.*	2,4691358.
	Si coniano pezzi 45 *da* 1 *libbra* (gr. 500) *di argento fino.*		

Grecia.

(Sistema metrico decimale con altre denominazioni).

Lunghezza . —	*Piki* = 10 palmi di 10 pollici da 10 linee = .	*met.*	1,000'
Capacità	*Kilo* = ...	*lit.*	100,000.
	Litro = 10 *kotyli* di 10 *mystra* da 10 *kubus* =	»	1,000.
Peso.....	*Dramma* = 10 oboli di 10 grani (1500 dramme = 1 mina; 100 mine = 1 talento) = ...	*gr.*	1,000.
Monetarie ..	*Dramma* = 100 *lepta*, centesimi = ...	*L.it.*	0,895333.
	Si coniano Dramme 58,043063 *da* 1 *Marco di Colonia d'argento fino.*		

Inghilterra.

Lunghezza..	*Yard*=3 *feet*, piedi, di 12 *inches*, pollici (*yards* 5 5[2 = 1 *perch*) = ...	*met.*	0,91438.
Capacità	*Gallone imperiale* = 2 *pottleis* (1 *Peck* = 2 galloni; 1 *bushel* = 4 *pecks*) = ...	*lit.*	4,54348.
	Gallone id. = 4 quarti di due pinte (42 galloni = 1 *tierce*, botte) = ...	»	4,54345.
Peso	*Libbra avoir du poids* = 16 once di 16 dramme (112 libbre = 1 *Hundredweight:* quintale; 144 lib. *a.d.p.* = 175 lib. *troy*) = ...	*gr.*	453,5922.
Monetarie ..	*Lira sterlina* = 20 scellini di 12 *pence*, denari =	*L.it.*	25,2213245.
	Si coniano — *Lire sterl.* 46 29[40 *da* 1 *lib. troy d'oro* 11[12.		
	Si coniano — *Scellini* 66 *da* 1 *lib. troy d'argento* 37[40.		

Norvegia.

Lunghezza . —	*Alen* = 2 *fod* di 12 *tommer* = ...	*met.*	0,627526.
Capacità	*Tonde* = 8 *skiaepper* di 18 *pott* (1 *skiaepper* = 4 *fierdingkar*) = ...	*lit.*	139,1213
	Ahm = 155 *pott*. (2 *pott* = 1 *kande*) = ...	»	149,7486
Peso..... —	*Pund* = 16 *unzer* di 2 *lod* da 4 *quintin* = .	*gr.*	498,400
Monetarie...	*Tallero species* = 5 *ort* di 24 scellini = ...	*L.it.*	5,6181801.
	Si coniano Talleri species 9 1[4 *da* 1 *Marco di Colonia di argento fino.*		

Olanda.

(Sistema Metrico decimale con altre denominazioni).

Lunghezza	*El*, auna, = 10 *palmi* di 10 *duim* da 10 *streep* (10 *El* = 1 *roede*) = ...	*met.*	1,000.
Capacità	*Mud* = 10 *schepel* di 10 *kop* da 10 *maatie* (30 *mud* = 1 *last*) = ...	*lit.*	100,000.
	Vat = 100 *kan* di 10 *maatie* da 10 *Vingerhoeden* ..... =	»	100,000.
Peso	*Pond*, libbra, = 10 *ons* di 10 *lood* da 10 *vigtje* =	*gr.*	1000,000.
Monetarie	*Fiorino* = 100 *cents*, centesimi, = ...	*L. it.*	2,10.
	Si coniano Fiorini 82,91 *da* 1 *libbra* (500 gr.) *di argento fino.*		

Portogallo.

Lunghezza	*Vara*, auna, = 5 *palmos* (1 *palmo* = *pollegadas* 8 1|4) = ...	*met.*	1,100.
Capacità	*Fanega* = 4 *alqueires* di 2 *meios* (15 *fanegas* = 1 mojo) = ...	*lit.*	55,363.
	Almude = 2 *potes* di 6 *canadas* (30 *almudes* = 1 *pipa*) = ...	»	16,741.
Peso	*Arratel*, libbra, = 4 *onças* (32 *arratels* = 1 arroba; 4 arrobas = 1 quintale) = ...	*gr.*	459,000.
Monetarie	*Milreis* = 1000 *reis* = ...	*L. it.*	5,5996664.
	Si coniano Milreis 615,116 *da* 1 *Chilogr. d'oro fino.*		

Russia.

Lunghezza	*Arschin*, auna, = 16 *Werschok* (3 *arschin* = 7 piedi = 1 *saschen*; 500 *saschen* = 1 *Werst*) =	*met.*	0,71119.
Capacità	*Tschetwert* = 2 *osmine* di 4 *tschetwerik* = ..	*lit.*	209,902.
	Wedro = 10 *kruschka* = 8 *stof*, bottiglia, (40 *Wedro* = 1 *botschka*, botte) = ...	»	12,2989.
Peso	*Pfund* = 32 *loth* di 3 *Solotnick* (40 *pfund* = 1 *pud*; 10 *pud* = 1 *berkowetz*) = ...	*gr.*	409,51136.
Monetarie	*Rublo argento* = 100 *kopek* = ...	*L. it.*	3,9991363.
	Si coniano 100 *Rubli da* 5 *Pfund* 6 *Solotnick*, *ossia pfund* 5 1|16, *d'argento al titolo* 250|288.		

Spagna.

(Sistema Metrico decimale, eccetto per le monete.)

Monetarie	*Piastra* o *Peso duro* = 20 reali = ...	*L. it.*	5,2582057.
	Si coniano Piastre 8 3|4 *da* 1 *marco* (gr. 230,0465) *di argento* 9|10.		

Svezia.

Lunghezza	*Fot*, piede = 10 pollici di 10 linee (*Aln*, auna, = 2 *fot*) = ...	*met.*	0,296901.
Capacità	*Piede cubo* = 10 canne di 100 pollici cubi =	*lit.*	26,17188.
	Piede cubo = id. id. =	»	26,17188.

Peso	*Pfund* = 100 *ort* di 100 *korn* (100 *pfund* = 1 *centner*) = ...	*gr.*	425,010.
Monetarie	*Ristallero* = 100 *oere* = ...	*L. it.*	1,4166910.
	Si coniano Ristalleri 36,68235 *da* 1 *Marco di Colonia* (gr. 233,8555) *d'argento fino.*		

Svizzera.

Lunghezza	— *Piede* = 10 pollici di 10 linee da 10 tratti —	*met.*	0,300.
Capacità	*Viertel* o *Sester* = 10 emine = ...	*lit.*	15,000.
	Maass, misura, = 2 *halben Maass* di 12 *Viertelmaass* = ...	»	1,500.
Peso	— *Libbra* = 16 once di 2 *loth* = ...	*gr.*	500,00.
Monetarie	— Sistema metrico decimale.		

Turchia.

Lunghezza	*Pik* per la lana (*Endaseh* per la seta = m. 0,65277) = ...	*met.*	0,68579.
Capacità	*Kilò* (4 *kilò* = 1 *fortin*) = ...	*lit.*	35,266.
	Alma = ...	»	5,205.
Peso	*Oka* = 400 dramme di 64 grani (44 *oke* = 1 *Kantar*, quintale) = ...	*chilog.*	1,28556.
Monetarie	*Piastra* = 40 *paras* di 3 *aspri* (la *piastra* si divide pure in 100 *aspri*) = ...	*L. it.*	0,2216651.
	Si coniano Piastre 1002,5131 *da* 1 *chilogr. d'argento fino.*		

FINE.

INDICE

Parte Prima

Preliminari . . . . . *Pag.* 2
CAPO I. **Numerazione** . . . . . » 4
§ 1° Numerazione parlata . . . . . » *ibid.*
§ 2° Numerazione scritta . . . . . » 7
§ 3° Numerazione dei decimali . . . . . » 10
§ 4° Delle cifre romane . . . . . » 13
CAPO II. **Operazioni fondamentali** . . . . . » 14
Definizione e segni . . . . . » *ibid.*
§ 1° Addizione . . . . . » 15
§ 2° Sottrazione . . . . . » 19
Relazione fra l'addizione e la sottrazione . » 23
Del complemento aritmetico . . . . . » 24
§ 3° Moltiplicazione . . . . . » 27
Come in alcuni casi si abbrevia la moltiplicazione » 33
§ 4° Divisione . . . . . » 36
Quoto per approssimazione . . . . . » 43
Come in alcuni casi si abbrevia la divisione » 46
Relazione tra la moltiplicazione e la divisione » 47
Problemi di ricapitolazione sulle quattro regole » 49
CAPO III. **Proprietà de' numeri** . . . . . » 51
§ 1° Rappresentazione dei numeri mediante le lettere dell'alfabeto . . . . . » *ibid.*
Rappresentazione dei numeri pari, dei numeri impari e delle unità de' diversi ordini . . » 53
Rappresentazione d'un numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze del 10 » 54
2° Differenti sistemi di numerazione . . . . . » 55
3° Teoremi relativi alla moltiplicazione . . . » 58
§ 4° Teoremi relativi alla divisione . . . . . » 61
§ 5° Teoremi sulla divisibilità dei numeri . . . » 67
Caratteri di divisibilità . . . . . » 68
Esercizi sulla divisibilità de' numeri; teoremi da dimostrare . . . . . » 72
§ 6° Prova per 9 delle quattro operazioni . . . » 73

§ 7° Massimo comun divisore de' numeri interi . *Pag.* 76
Ricerca del massimo comun divisore di due numeri . . . . . » *ibid.*
Ricerca del M. C. D. di più di due numeri » 78
§ 8° Teorica de' numeri primi. . . . . » 79
Ricerca d'un'espressione che comprenda tutti i numeri primi . . . . . » 81
Tavola di tutti i numeri primi inferiori a 2000 » 83
Ricerca di tutti i divisori d'un numero . . » 88
Composizione del massimo comun divisore di più numeri . . . . . » 89
Composizione del minimo multiplo comune a più numeri . . . . . » 90
Esercizi sui numeri primi; teoremi da dimostrare » 92
CAPO IV. **Teorica delle frazioni** . . . . . » 93
§ 1° Frazioni in genere . . . . . » *ibid.*
§ 2° Frazioni ordinarie . . . . . » 94
Proprietà delle frazioni . . . . . » *ibid.*
§ 3° Riduzione delle frazioni . . . . . » 97
Minimo denominatore comune a più frazioni » 99
§ 4° Addizione delle frazioni . . . . . » 101
§ 5° Sottrazioni delle frazioni. . . . . » 103
§ 6° Moltiplicazione delle frazioni . . . . . » 105
§ 7° Divisione delle frazioni . . . . . » 109
Quantità reciproche . . . . . » 111
Trasformare una frazione in altra equivalente, e che abbia per denominatore un numero dato » *ibid.*
§ 8° Frazioni decimali . . . . . » 113
Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali » 114
Frazioni periodiche . . . . . » 115
Riduzione delle frazioni decimali in ordinarie; generatrici . . . . . » 116
Problemi di ricapitolazione sulle frazioni . » 120
§ 9° Valutazione approssimata delle quantità e de'numeri » 122
Quantità incommensurabili . . . . . » 123
§ 10° Operazioni abbreviate con approssimazione fino ad una data cifra decimale . . . . . » 125
CAPO V. **Potenze e radici** . . . . . » 131
§ 1° Potenze e radici in genere . . . . . » *ibid.*
§ 2° Teorica de' quadrati e delle radici quadrate . » 133
§ 3° Estrazione della radice quadrata . . . . . » 139
§ 4° Estrazione abbreviata della radice quadrata . » 150
§ 5° Teorica de' cubi e delle radici cubiche . . . » 152
§ 6° Estrazione della radice cubica . . . . . » 156
§ 7° Estrazione di alcune radici di grado superiore al terzo. . . . . » 164
Problemi sull'estrazione della radice cubica. » 166
Problemi di ricapitolazione sulla 1ª Parte . » 168

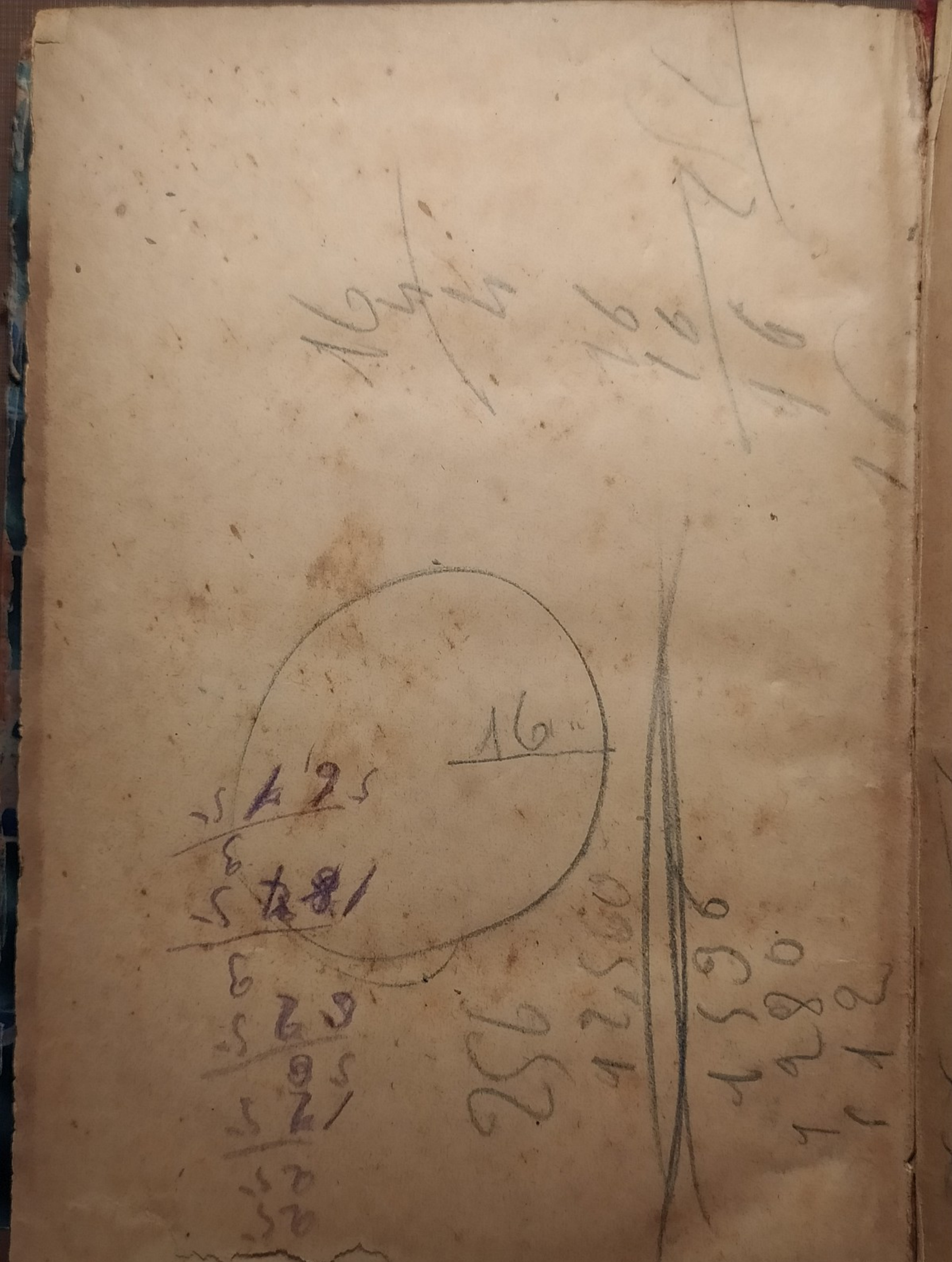
PARTE SECONDA.

Preliminari sulle misure in generale . . *Pag.* 172
CAPO I. **Sistema metrico decimale** . . . . . » *ibid.*
§ 1° Misure metriche in generale . . . . . » *ibid.*
§ 2° Misure di lunghezza . . . . . » 173
§ 3° Misure di superficie . . . . . » 175
§ 4° Misure di volume . . . . . » 178
§ 5° Misure di capacità . . . . . » 182
§ 6° Misure di peso; pesi specifici o densità . . » 183
Tavola delle densità di alcuni corpi . . . » 185
§ 7° Misure di valore o monete . . . . . » 187
Problemi sulle relazioni tra le misure metriche » 191
Problemi di ricapitolazione sul sistema metrico » 192
CAPO II. **Misure antiche** . . . . . » 194
§ 1° Misure del Piemonte . . . . . » *ibid.*
§ 2° Misure delle altre provincie d'Italia . . . . » 196
§ 3° Misure del tempo, della circonferenza e della temperatura . . . . . » 199
CAPO III. **Calcolo dei numeri complessi** . . . . . » 204
§ 1° Riduzioni . . . . . » *ibid.*
§ 2° Le quattro operazioni sui numeri complessi . » 207
Problemi sui numeri complessi . . . . . » 212
Problemi di ricapitolazione sulla II^a Parte . » 215

PARTE TERZA.

CAPO I. **Proporzioni, interesse, annualità e sconto** » 218
§ 1° Rapporti . . . . . » *ibid.*
§ 2° Proporzioni . . . . . » 219
Proprietà delle equidifferenze . . . . . » 220
Proprietà delle proporzioni . . . . . » 221
Quantità direttamente o indirettamente proporzionali . . . . . » 225
§ 3° Regola del tre semplice . . . . . » 226
§ 4° Regola del tre composta . . . . . » 230
§ 5° Interesse semplice . . . . . » 235
Metodo dei divisori fissi . . . . . » 237
Metodo delle parti aliquote . . . . . » 238
§ 6° Interesse composto . . . . . » 241
Tavola pel calcolo degl'interessi composti . » 244
§ 7° Annualità e ammortimenti . . . . . » 247
Tavola pel calcolo dell'annualità . . . . » 248
Tavola pel calcolo degli ammortimenti . . » 251
§ 8° Sconto; sconto in fuori; sconto in dentro . » 253
Sconto composto . . . . . » 256

CAPO II. Rendite sullo Stato, effetti di commercio, conti correnti, ecc. . . . . *Pag.* 258
§ 1° Rendite sullo Stato o fondi pubblici . . . » *ibid.*
§ 2° Effetti di commercio . . . . . » 261
Lettera di cambio . . . . . » *ibid.*
Biglietto all'ordine . . . . . » 265
Mandato . . . . . » 266
Lettera di credito . . . . . » 267
§ 3° Conti correnti . . . . . » 268
§ 4° Compere e vendite, profitti e perdite, commissione » 277
§ 5° Assicurazioni, avarie, tara, trasporto delle merci » 279
Prestito a cambio marittimo . . . . . » 280
CAPO III. Regole di ripartizione, di società, di miscuglio, ecc. . . . . » 284
§ 1° Regola di ripartizione proporzionale . . . . » *ibid.*
§ 2° Regola di società . . . . . » 290
§ 3° Azioni industriali . . . . . » 293
§ 4° Ragguagli d'interesse e di tempo . . . . . » 295
§ 5° Miscuglio e alligazione . . . . . » 298
Quantità medie . . . . . » 301
CAPO IV. Regola congiunta, monete estere, cambio, ecc. » 303
§ 1° Regola congiunta, parità delle monete . . . » *ibid.*
§ 2° Cambio . . . . . » 307
Prezzo del cambio . . . . . » 308
Listino del cambio; parità dei cambi . . . » 310
Cambio diretto e cambio indiretto . . . . » 312
§ 3° Arbitrato . . . . . » 316
Problemi di ricapitolazione sulla III^a Parte. » 323
Tavola delle principali misure degli Stati d'Europa . . . . . » 328



56
8 9 1 / 57 2

La prima lezione della Lig.ria C. e Ll. Na-